

Paolo Angelozzi

appunti di **M**eccanica
Strutturale

ad uso degli studenti
dei corsi di laurea triennale in Architettura

con esercizi svolti

prefazione di Antonella Cecchi

Copyright © 2008
Tecnologos Editore

La riproduzione, anche parziale o ad uso interno o didattico di questa dispensa didattica, con qualsiasi mezzo effettuata, non autorizzata è punibile in base alle leggi vigenti.
L'autore è in possesso dell'autorizzazione alla pubblicazione delle immagini riprodotte nell'opera; rimane tuttavia a disposizione di tutti coloro che possono vantare diritti sulle immagini.

I edizione: 2008

Tecnologos,
via Muntebei 22
46040 Cavriana (MN)
Tel. 037682160
Fax. 02700530215
e-mail: edizioni@tecnologos.it
www.tecnologos.net

ISBN 97-88888697-24-6

Questa raccolta di appunti non ha pretese di esaustività nei confronti di una materia, come la meccanica strutturale, complessa ed articolata. E' un compendio delle nozioni base della disciplina che sono di ausilio ad uno studente che si confronta con la stessa per la prima volta.

Gli argomenti, sviluppati consequenzialmente, cercano di seguire un iter logico che porti il fruitore ad uno studio lineare dell'argomento, dalle basi ai temi più complessi; dalla teoria dei vettori, come modello meccanico delle azioni, al modello geometrico di trave e semplici sistemi di travi, al concetto di isostaticità ed iperstaticità, condizioni di equilibrio e congruenza, sino a giungere a concetti elementari della meccanica dei continui. Inoltre, sono stati inseriti richiami di matematica e geometria ove necessario, al fine di non lasciare dubbi su quanto viene dimostrato di volta in volta. Anche gli esercizi svolti contengono talvolta precisazioni e metodologie utili, non affrontate in sede teorica.

Si auspica, quindi, che queste poche pagine possano rendere il mondo della meccanica strutturale meno ostico per chi lo affronta, e forse far nascere passione per la materia.

Questi appunti, redatti da Paolo Angelozzi, contengono traccia delle mie lezioni per i corsi di Meccanica Strutturale 1 e Meccanica Strutturale 2 e possono rappresentare un valido strumento per gli studenti che come Paolo si avvicinano alle tematiche della meccanica strutturale. E' per me motivo di orgoglio vedere come l'impegno e la costanza di Paolo hanno permesso di mettere a punto questo valido supporto al programma che svolgo nel corso di Laurea triennale in Scienze dell'Architettura.

Antonella Cecchi

PREFAZIONE

STATICÀ DELLA TRAVE

A

A.1

TEORIA DEI VETTORI

Vettori liberi.

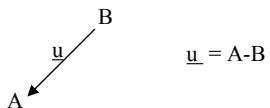
Un vettore è un *modello matematico utilizzabile per la rappresentazione di azioni meccaniche*.

È caratterizzato da:

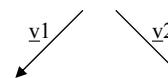
- un modulo
- una direzione (retta d'appartenenza al vettore)
- un verso (da A a B)

Quindi un vettore è un *segmento orientato dotato di modulo, direzione e verso*.

Il vettore viene indicato con una lettera minuscola sottolineata \underline{u} , o come differenza fra i punti definiti il modulo (es. A-B).



Dati due vettori \underline{v}_1 e \underline{v}_2
è possibile procedere a
diverse operazioni.



Vettore somma.

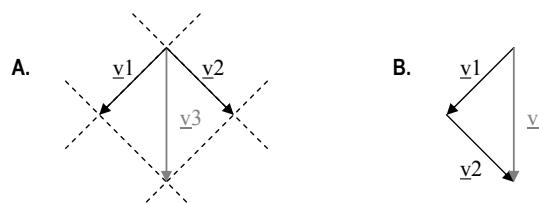
Si intende ridurre questo sistema di vettori ad un sistema di un unico vettore equivalente, risultante dei due vettori.

metodo A (il parallelogramma)

- a. far coincidere i punti di partenza dei due vettori
- b. tracciare le rette direzionali di \underline{v}_1 e \underline{v}_2
- c. tracciare le parallele alle rette passanti nei punti finali dei vettori
- d. tracciare, dalle partenze dei vettori, un vettore fino all'intersezione fra le due nuove rette
→ si ottiene \underline{v}_3 , risultante dei due vettori.

metodo B

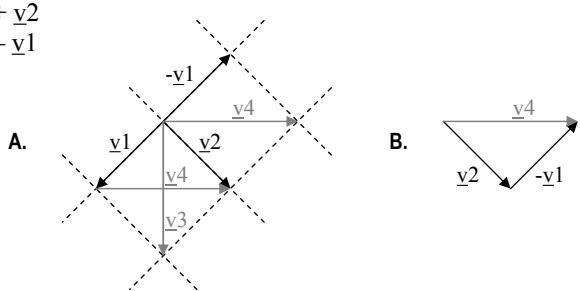
traslare i vettori \underline{v}_1 e \underline{v}_2 nelle rispettive terminazioni, trovando la risultante.



Vettore differenza.

Graficamente, corrisponde alla diagonale minore del parallelogramma.

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \\ \underline{v}_2 = \underline{v}_3 - \underline{v}_1$$

Prodotto di un vettore per uno scalare.

Dati il vettore \underline{v} ed il numero reale λ , il prodotto $\underline{v} * \lambda$ fra il vettore e lo scalare può restituire:

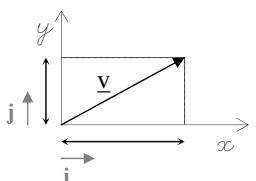
- per $\lambda > 0$ un vettore con verso concorde a quello di partenza
- per $\lambda < 0$ un vettore con verso opposto
- per $0 < \lambda < 1$ un vettore più piccolo di quello di partenza, verso concorde
- per $\lambda > 1$ un vettore più grande di quello di partenza, verso concorde

Prodotto scalare (o prodotto interno).

Ogni vettore, idealmente posto in un piano cartesiano, possiede una componente orizzontale ed una verticale; per definirle si associano agli assi xy due *versori unitari* i e j . Due versori unitari non dipendenti linearmente sono la base per individuare ogni vettore del piano.

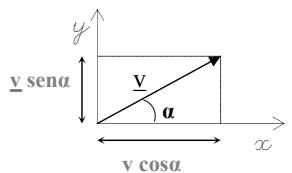
$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = 2j + 3i$$



Rappresentazione trigonometrica:

$$\underline{v} = \sqrt{\underline{v} \operatorname{sen}^2 + \underline{v} \operatorname{cosec}^2}$$



prodotto scalare = vettore forza * vettore spostamento = lavoro = un numero k .

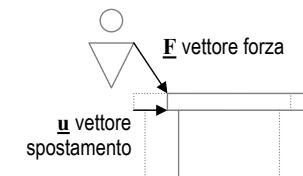
$$\underline{F} * \underline{u} = k$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = 3i - 2j$$

$$\underline{u} = 2i$$

$$\underline{F} * \underline{u} = 3i * 2i - 2j * 0j = 6 \text{ (i versori, essendo unitari, valgono 1).}$$



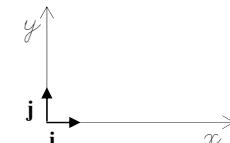
In sostanza il prodotto scalare restituisce l'entità del vettore, è la componente di un vettore secondo la direzione (espressa in seno e coseno) di un altro vettore.

Nel piano:

$$i * i \text{ (leggasi "i scalare i")}$$

= componente del modulo per coseno di 0

$$= 1 * 1 = 1.$$



$$i * j \text{ (leggasi "i scalare j")}$$

= componente del modulo per coseno di $\pi/2$

$$= 1 * 0 = 0.$$

→ il prodotto scalare di vettori ortogonali fra loro è zero.

-esempio pratico-

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} i=1 \\ j=2 \\ k=1 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} i=3 \\ j=-1 \\ f \end{bmatrix}$$

? = Determinare f in modo che i due vettori siano ortogonali.

$$\underline{v}_1 * \underline{v}_2 = 0$$

$$1i * 3i + 2j * (-1j) + 1k * f = 0$$

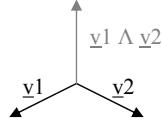
$$3 - 2 + f = 0$$

$$f = -1$$

	i	j	k
i	$i * i$ $1 * 1 = 1$	$i * j$ $1 * 0 = 0$	$i * k$ 0
j	$j * i$ $1 * 0 = 0$	$j * j$ $1 * 1 = 1$	$j * k$ 0
k	$k * i$ 0	$k * j$ 0	$k * k$ 1

Prodotto vettoriale (o prodotto esterno).

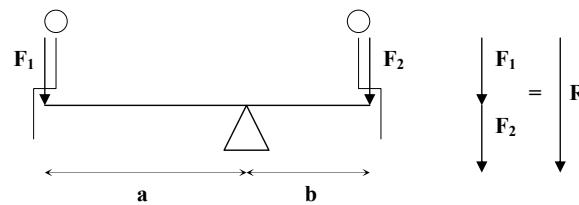
Dati due vettori \underline{v}_1 e \underline{v}_2 , il prodotto vettoriale $\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2$ restituisce un vettore ortogonale ai due vettori di partenza.



	i	j	k
i	$i \wedge i$ 0	$i \wedge j$ +1	$i \wedge k$ -1
j	$j \wedge i$ -1	$j \wedge j$ 0	$j \wedge k$ +1
k	$k \wedge i$ +1	$k \wedge j$ -1	$k \wedge k$ 0

Vettori applicati.

Nelle strutture si parla di *vettori applicati* (siano essi forze o spostamenti), i quali *non possono essere spostati liberamente nello spazio, ma solamente secondo la loro retta d'azione*. In una struttura, inoltre, le forze devono essere *in equilibrio*, e cioè avere uguale modulo, uguale direzione ma verso opposto.



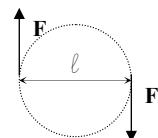
E' evidente che per *equilibrare il sistema* servono la *risultante* [R] delle forze in gioco ed il *braccio di applicazione delle forze*.

$$F_1 : a = F_2 : b \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{a}{b}$$

In questo modo è possibile spostare gli assi di applicazioni delle forze, aggiungendo un *momento di trasporto* creato dalle forze di partenza.

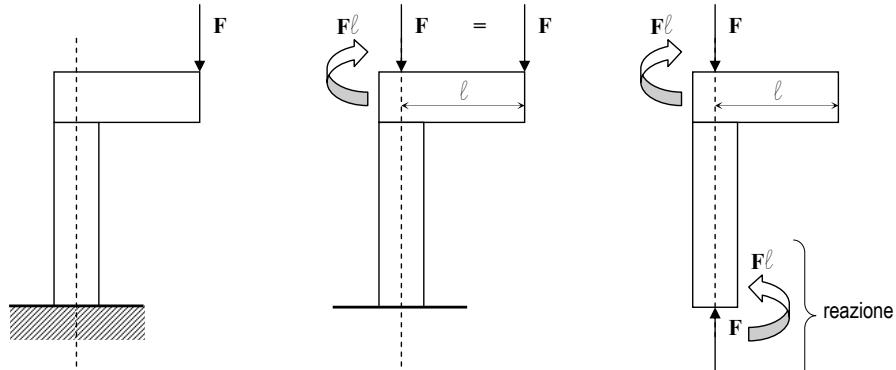
*momento = forza [F] * lunghezza [l]*

→ *coppia di forze uguali in modulo e direzione ma opposte in verso.*



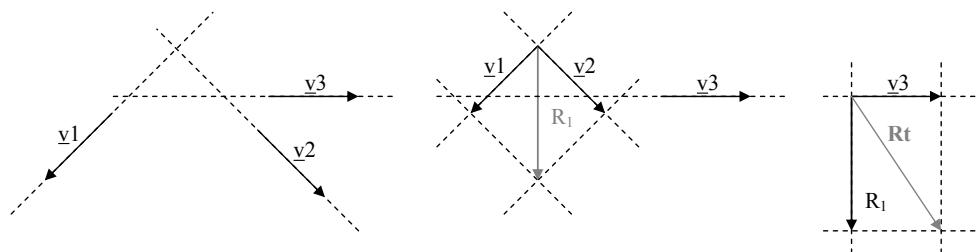
N.b. le forze si misurano in Newton [N], ed i momenti in Newton per metri [N*m]

-esempio pratico (pilastro con trave a sbalzo)-

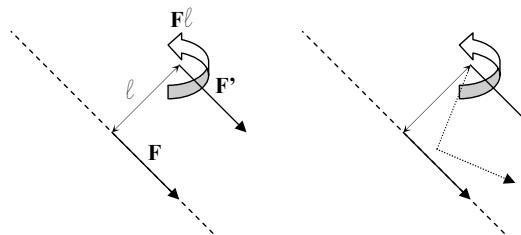


In questo modo si ottiene un *sistema equivalente* a quello di partenza, ovverosia un *sistema che ha gli stessi effetti di quello iniziale*.

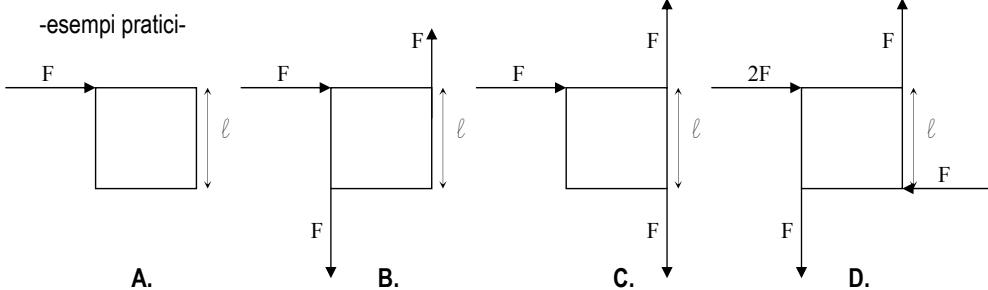
È possibile ottenere la risultante complessiva del sistema (R_t) traslando solamente i vettori lungo la loro retta d'azione, operazione lecita con i vettori applicati.



Ripetendo, qualsiasi sistema può essere ricondotto ad un sistema equivalente in un asse parallelo, con l'aggiunta di un momento di trasporto; ma è necessario prendere la *distanza l ortogonale alla retta d'azione della forza*.



-esempi pratici-

A \neq B due forze producono un momento  applicato nel baricentro

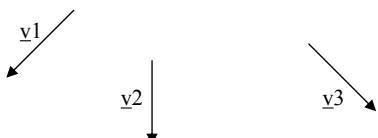
A = C due forze si elidono

A = D le forze producono due momenti  opposti che si elidono. Rimane la forza F applicata come in AA \neq E differente retta d'azione della forza

A = F uguale retta d'azione

Poligono funicolare.

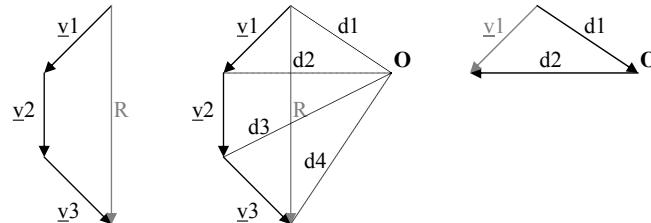
Metodo grafico per l'individuazione della risultante e dell'asse centrale di vettori applicati.

Dati tre vettori \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 

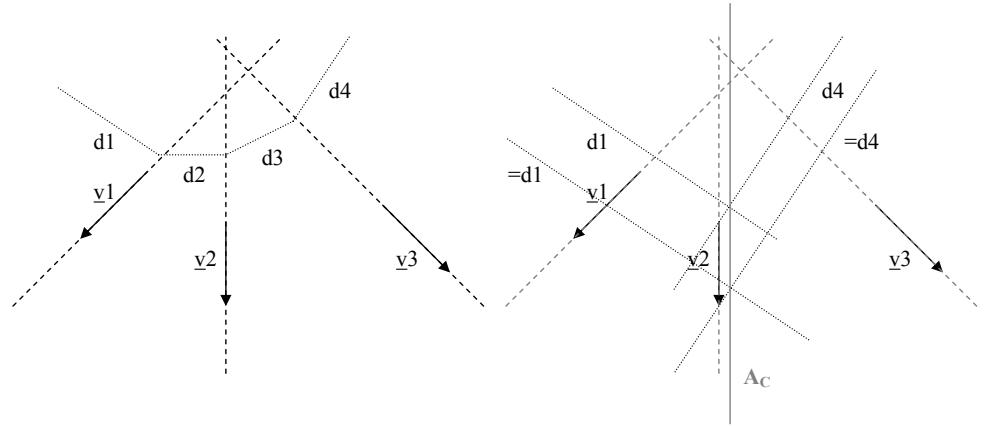
a. trattare i vettori come fossero vettori liberi e trovare la risultante.

b. scegliere un polo arbitrario O.

c. tracciare le congiungenti con i poli dei vettori.

N.b. ad esempio, \underline{v}_1 è anche uguale al percorso delle sue congiungenti.

d. riportare, partendo da un punto qualsiasi, le parallele alle congiungenti sulle rette d'azione dei tre vettori.



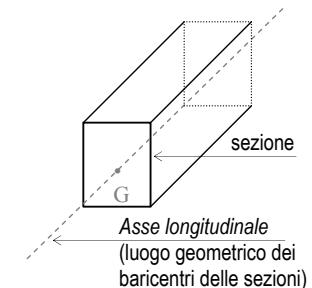
e. prolungare d1 e d4, ripetendo la precedente operazione per un paio di volte; si ottengono i punti per cui passa l'asse centrale del sistema (Ac).

- Dati due vettori paralleli concordi, l'asse centrale è parallelo alla direzione dei vettori e cade fra di essi, più prossimo al vettore possedente maggior modulo.
- Dati due vettori paralleli discordi, l'asse centrale cade all'esterno dei due vettori, più prossimo al vettore possedente maggior modulo.

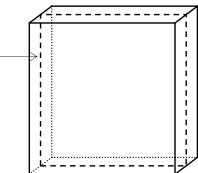
A.2 VINCOLI ED EQUILIBRIO

STATICHE DELLA TRAVE

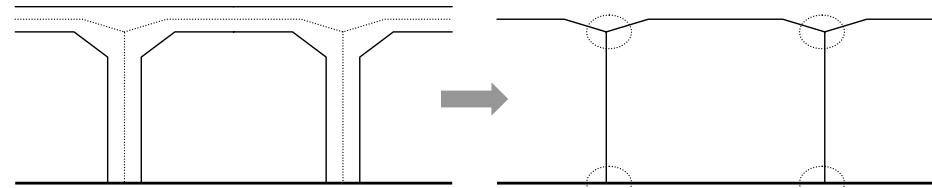
Travi e pilastri sono oggetti *monodimensionali*, e cioè oggetti con una dimensione predominante → le dimensioni della sezione sono piccole se confrontate con la lunghezza, e quindi approssimabili ad una linea passante per l'asse baricentrico dell'oggetto → *modello monodimensionale = linea congiungente i baricentri delle diverse sezioni*.



Setti e pannelli necessitano invece di un *modello bidimensionale*, basato sulla *superficie media* (luogo geometrico dei baricentri dello spessore).



Esempio di schematizzazione strutturale:



Il problema sorge nelle giunzioni fra elementi (travi, pilastri, suolo) → vengono posti dei *vincoli al moto rigido* dell'oggetto, determinando movimenti leciti ed illeciti → il vincolo espleta delle azioni uguali e contrarie a quelle che agiscono sulla struttura, neutralizzandole → *reazione*. Le strutture affrontate d'ora in poi saranno quindi *ferme ed in equilibrio*.

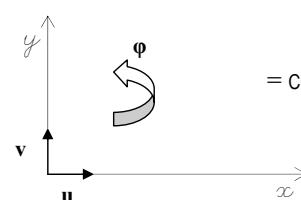
Gradi di libertà nel piano.

nello spazio = 6 (tre traslazioni, tre rotazioni)
nel piano = 3 (due traslazioni, una rotazione)

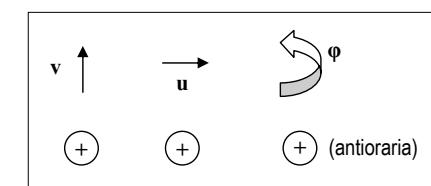
u = spostamento parallelo all'asse x

v = spostamento parallelo all'asse y

φ = rotazione intorno all'asse z



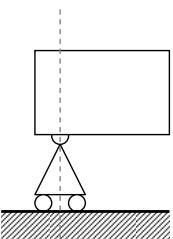
= CONVENZIONE POSITIVA →



Alcuni tipi di vincolo.

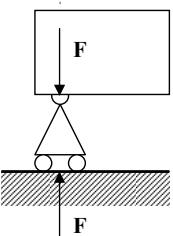
- **Appoggio o carrello (vincolo semplice bilatero)**
impedisce che l'oggetto trasli secondo una direzione, vincolando un grado di libertà.

cinematica	statica
$u \neq 0$	$H = 0$
$v = 0$	$V \neq 0$
$\varphi \neq 0$	$M = 0$



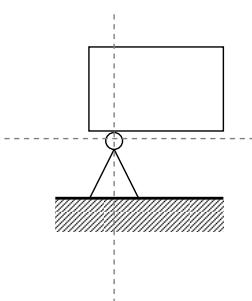
L'appoggio può espletare una reazione uguale e contraria alla forza agente.

N.b. quando un oggetto è "appoggiato" ad un altro non lo compenetrà ma neanche può staccarsene = vincolo "bilatero".



- **Cerniera (vincolo doppio)**
impedisce due traslazioni, vincolando due gradi di libertà.

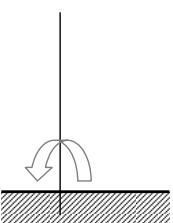
cinematica	statica
$u = 0$	$H \neq 0$
$v = 0$	$V \neq 0$
$\varphi \neq 0$	$M = 0$



La cerniera espleta due reazioni uguali e contrarie alle forze agenti; non espleta reazioni alla rotazione.

- **Incastro (vincolo triplo)**
vincola tutti i gradi di libertà, reagendo con una coppia di forze.

cinematica	statica
$u = 0$	$H \neq 0$
$v = 0$	$V \neq 0$
$\varphi = 0$	$M \neq 0$



L'incastro espleta tre reazioni uguali e contrarie alle forze agenti.

- Biella

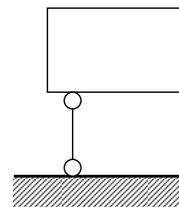
impedisce lo spostamento verticale ed in parte quello orizzontale; non impedisce la rotazione.

cinematica

$$\begin{aligned} 0 \leq u &\leq K \\ v &= 0 \\ \varphi &\neq 0 \end{aligned}$$

statica

$$\begin{aligned} H &= f(u) \\ V &\neq 0 \\ M &= 0 \end{aligned}$$



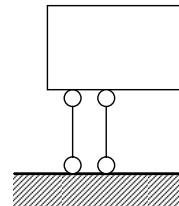
- **Doppio pendolo (due bielle vicine in parallelo)**
impedisce lo spostamento verticale ed in parte quello orizzontale; impedisce anche la rotazione.

cinematica

$$\begin{aligned} 0 \leq u &\leq K \\ v &= 0 \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

statica

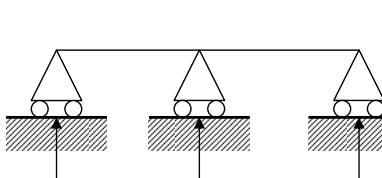
$$\begin{aligned} H &= f(u) \\ V &\neq 0 \\ M &\neq 0 \end{aligned}$$

Tipi di struttura.

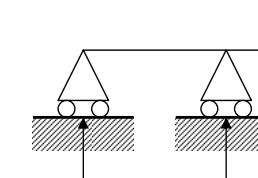
Controllando il rapporto fra gradi di libertà della struttura e numero dei vincoli, è possibile individuare tre tipi di struttura:

- Se GdL struttura > n.vincoli \rightarrow struttura labile
- Se GdL struttura = n.vincoli \rightarrow struttura isostatica
- Se GdL struttura < n.vincoli \rightarrow struttura iperstatica

N.b. la verifica dell'iperstaticità di una struttura dipende dalla *posizione dei vincoli* e da *quali gradi di libertà* impediscono.

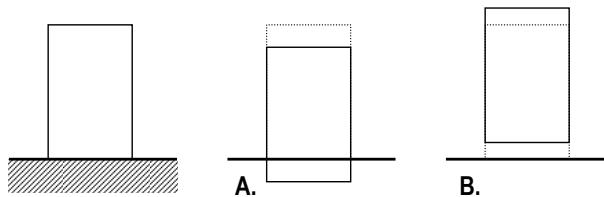


Struttura labile



Vincoli ben disposti (impediscono anche la rotazione)

I vincoli trattati finora sono detti *lisci* (si prescinde da qualsiasi fenomeno di attrito) e *bilateri* (impediscono lo spostamento nella direzione della reazione e nella sua contraria) → Ad esempio, in un oggetto appoggiato non si può verificare né la situazione A (compenetrazione di una superficie), né la B (distacco dalla medesima).

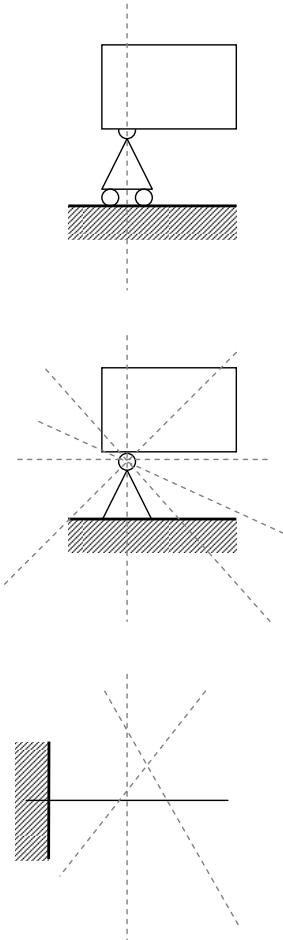


Linee d'azione delle reazioni nei vincoli.

Nell'*appoggio* sono noti il verso e la direzione della reazione, poiché il medesimo impedisce unicamente gli spostamenti perpendicolari al pattino.

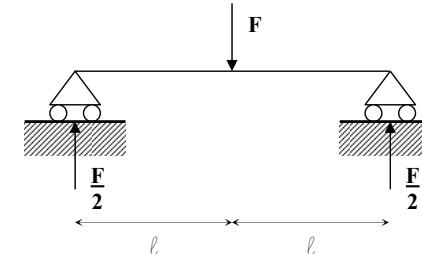
La *cerniera* non espleta reazioni di tipo momento. La linea d'azione delle reazioni passa sicuramente per il punto di cerniera, ma non se ne conosce a priori il coefficiente angolare.

Nell'*incastro* la linea d'azione delle reazioni non passerà per il vincolo; non è possibile conoscerne a priori punti noti ed inclinazione.



Equilibrio di una struttura.

Una struttura si dice *in equilibrio* quando le forze agenti sono bilanciate da reazioni uguali e contrarie. Tale condizione, comunque, è necessaria ma non sufficiente; ad esempio, la seguente struttura è in equilibrio, ma risulta labile.



È possibile procedere al calcolo solo dopo aver appurato l'*isostaticità* della struttura in analisi (GdL = n.vincoli).

In sostanza, per far sì che una struttura sia in equilibrio le sommatorie di tutte le forze ed i momenti agenti su di essa devono essere pari a zero.

$$\sum F_i = 0 \rightarrow F_i = F(\text{agenti}) + F(\text{reagenti})$$

$$\sum M_i = 0 \rightarrow M_i = M(\text{agenti}) + M(\text{reagenti})$$

Da queste equazioni derivano le *tre equazioni fondamentali della statica*:

$$\sum H_i = 0$$

→ la sommatoria delle *azioni orizzontali* deve essere pari a zero

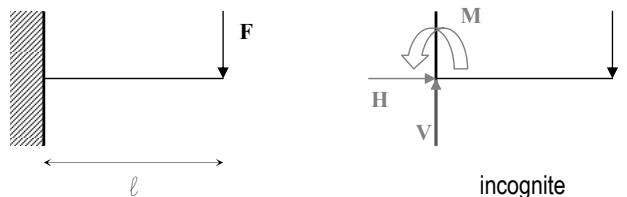
$$\sum V_i = 0$$

→ la sommatoria delle *azioni verticali* deve essere pari a zero

$$\sum M_i = 0$$

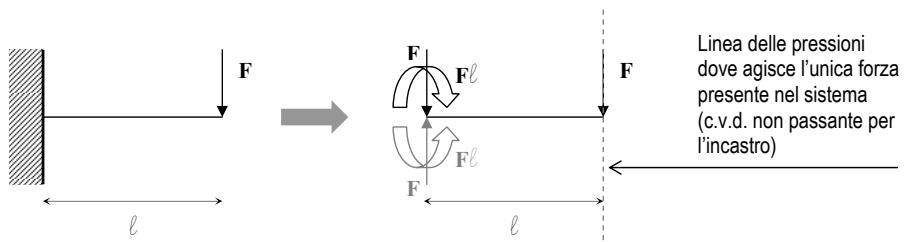
→ la sommatoria dei *momenti* deve essere pari a zero

-esempio pratico-

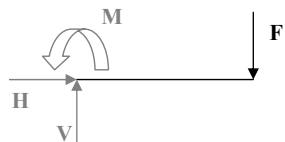


È possibile procedere mediante due sistemi di risoluzione: *grafico* ed *analitico*.

Nel *sistema grafico* si procede, innanzitutto, disegnando un *sistema equivalente* alla struttura di partenza \rightarrow si ridisegna la struttura, e mediante la *linea delle pressioni* si trasportano le forze nei vincoli, determinando in seguito le reazioni che il vincolo espleta.



Nel *sistema analitico* si applicano le tre equazioni fondamentali della statica alla struttura, sostituendo il vincolo con le reazioni che può espletare.



$$\sum H_i = 0 \rightarrow H = 0$$

$$\sum V_i = 0 \rightarrow V - F = 0 \rightarrow V = F$$

$$\sum M_i = 0 \rightarrow M - F \cdot l = 0 \rightarrow M = F \cdot l$$

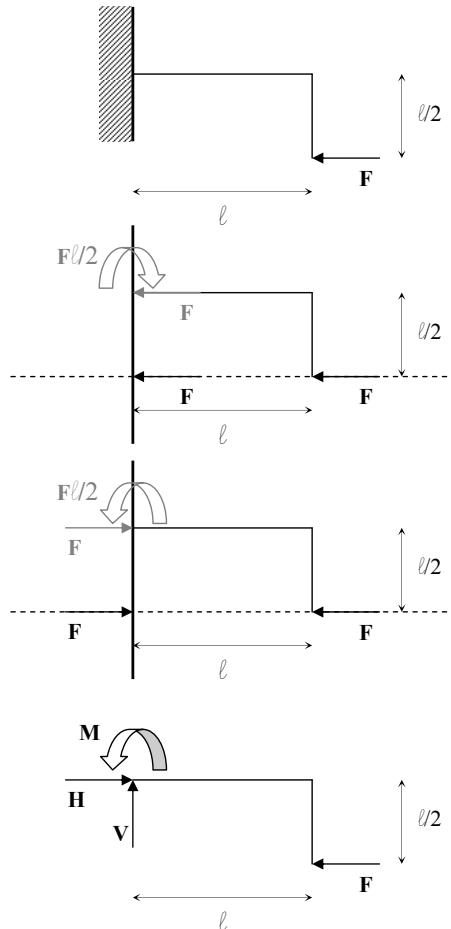
N.b. il punto di riferimento per il calcolo del momento è l'incastro.

Esercizio n.01

$$\sum H_i = 0 \\ H - F = 0 \rightarrow H = F$$

$$\sum V_i = 0 \\ V = 0$$

$$\sum M_i = 0 \\ M - F \cdot l/2 = 0 \rightarrow M = F \cdot l/2$$



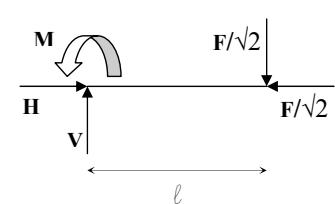
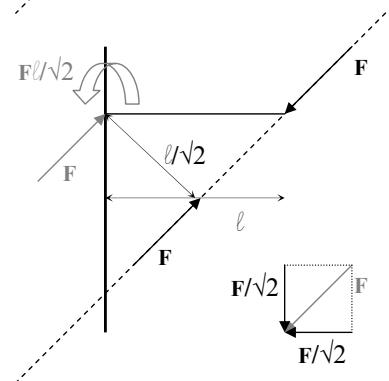
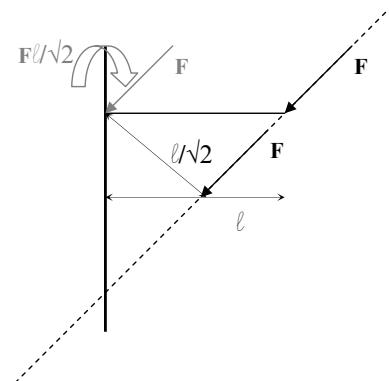
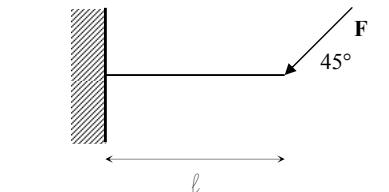
STATICA DELLA TRAVE

Esercizio n.02

$$\sum H_i = 0 \\ H - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow [H = F/\sqrt{2}]$$

$$\sum V_i = 0 \\ V - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow [V = F/\sqrt{2}]$$

$$\sum M_i = 0 \\ M - F/\sqrt{2} \cdot l = 0 \rightarrow [M = Fl/\sqrt{2}]$$



Esercizio n.03

$$\sum H_i = 0 \\ H_A - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow [H_A = F/\sqrt{2}]$$

$$\sum V_i = 0 \\ V_A - F/\sqrt{2} + V_B = 0$$

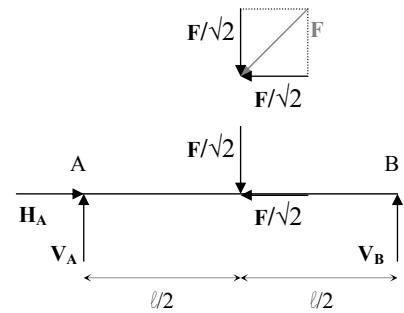
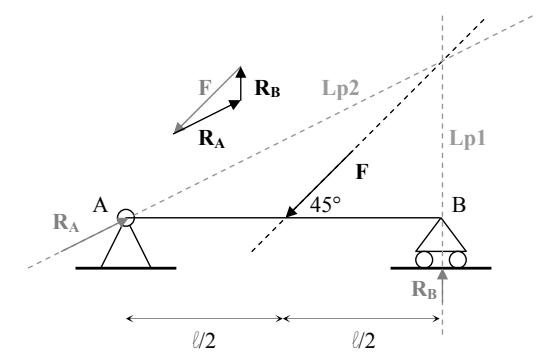
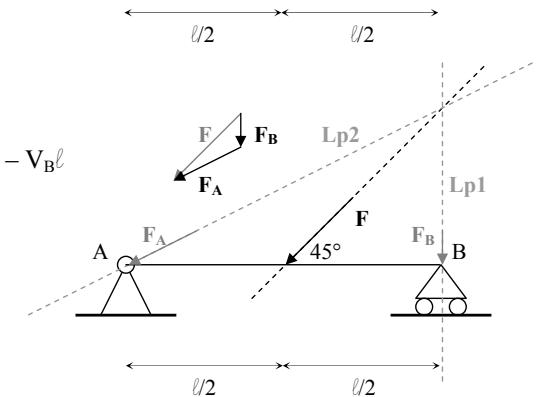
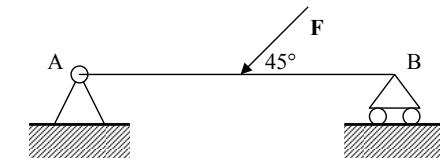
$$\sum M_A \text{ (calcolo del momento in A)} = 0 \\ M - F/\sqrt{2} \cdot l/2 + V_B \cdot l = 0 \rightarrow M = Fl/2\sqrt{2} - V_B l \\ \rightarrow [V_B = F/2\sqrt{2}] \\ \rightarrow V_A = F/\sqrt{2} - F/2\sqrt{2} \rightarrow [V_A = F/2\sqrt{2}]$$

Considerazioni

La linea delle pressioni passa per entrambi i vincoli \rightarrow si hanno due linee delle pressioni. Per determinarle si parte dall'appoggio, la cui direzione della reazione è nota, individuando Lp_1 ; l'intersezione fra Lp_1 e linea d'azione della forza e la cerniera sono i due punti che determinano la Lp_2 .

Per le reazioni si costruisce il "parallelogramma" all'inverso, utilizzando le due rette direzionali Lp_1 ed Lp_2 .

N.b. l'inclinazione ed il verso di R_A permette di ipotizzare, senza procedere alla soluzione analitica, il verso di V_A ed H_A .



VINCOLI ED EQUILIBRIO

Esercizio n.04

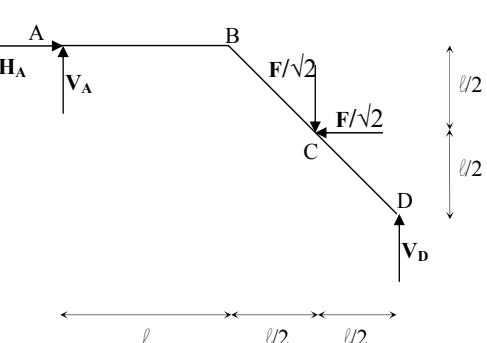
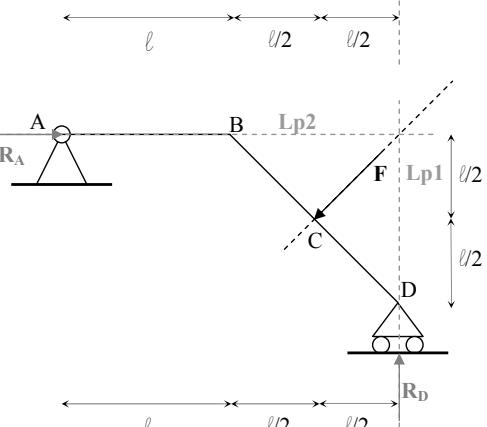
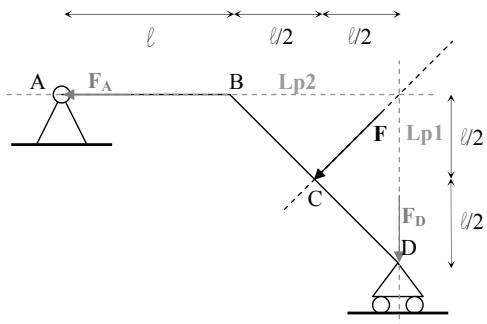
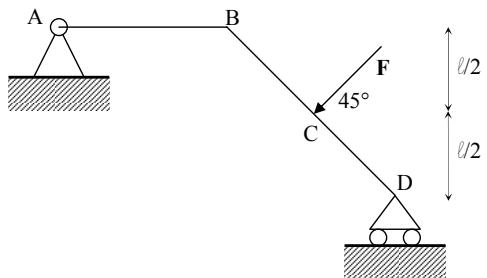
$$\sum H_i = 0 \\ H_A - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow [H_A = F/\sqrt{2}]$$

$$\sum V_i = 0 \\ V_A - F/\sqrt{2} + V_D = 0$$

$$\sum M_A = 0 \\ M - F/\sqrt{2} \cdot 3\ell/2 - F/\sqrt{2} \cdot \ell/2 + V_D \cdot 2\ell = 0 \\ \rightarrow M = 2F\ell/\sqrt{2} - 2V_D\ell \\ \rightarrow [V_D = F/\sqrt{2}] \\ \rightarrow [V_A = 0]$$

Lp1 valida da D a C
Lp2 valida da C ad A

Considerazioni
La soluzione analitica conferma quanto già appurato mediante il metodo grafico, e cioè che la cerniera esplata solamente una reazione orizzontale.



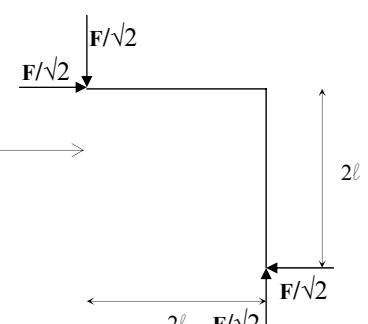
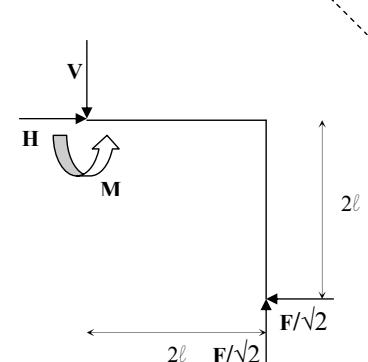
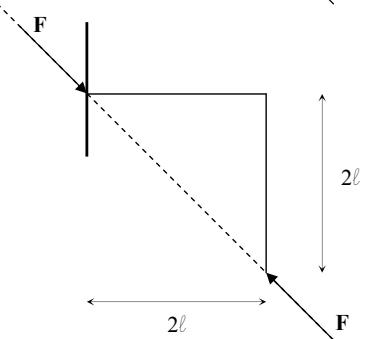
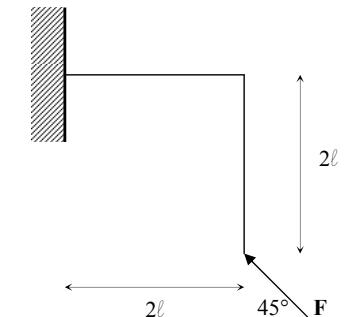
Esercizio n.05

$$\sum H_i = 0 \\ H - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow [H = F/\sqrt{2}]$$

$$\sum V_i = 0 \\ V - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow [V = F/\sqrt{2}]$$

$$\sum M_i = 0 \\ M - F/\sqrt{2} \cdot 2\ell + F/\sqrt{2} \cdot 2\ell \rightarrow [M = 0]$$

Diagramma di corpo libero
Si ridisegna la struttura, senza vincoli, mettendo al posto delle incognite le reazioni calcolate.



STATICA DELLA TRAVE

Esercizio n.06

$$\sum H_i = 0 \\ H_A - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow H_A = F/\sqrt{2}$$

$$\sum V_i = 0 \\ -V_A + V_B - F/\sqrt{2} = 0$$

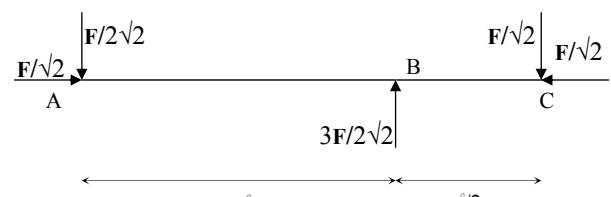
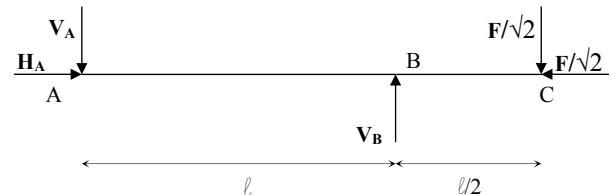
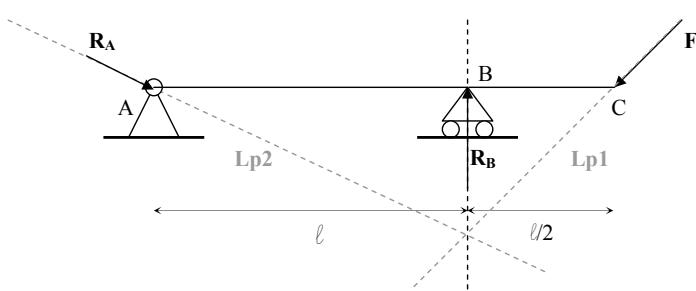
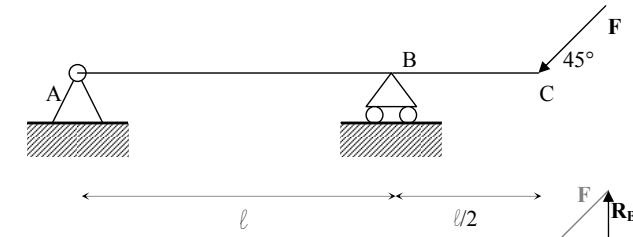
$$\sum M_A \\ M - F/\sqrt{2} \cdot 3l/2 + V_B \cdot l \\ \rightarrow M = 3Fl/2\sqrt{2} - V_B l$$

$$\rightarrow V_B = 3F/2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow V_A = 3F/2\sqrt{2} - F/\sqrt{2} \\ \rightarrow V_A = F/2\sqrt{2}$$

Lp1 valida da C a B

Lp2 valida da B ad A



Esercizio n.07

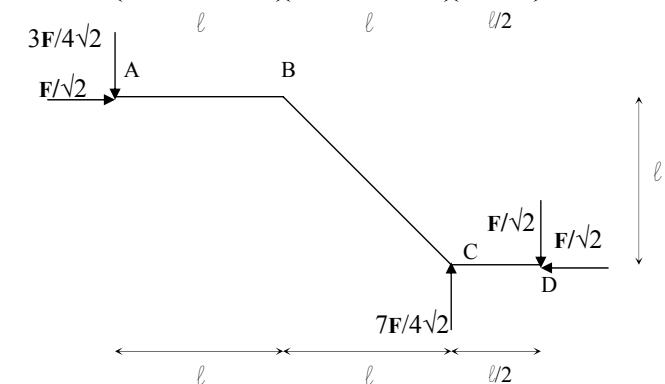
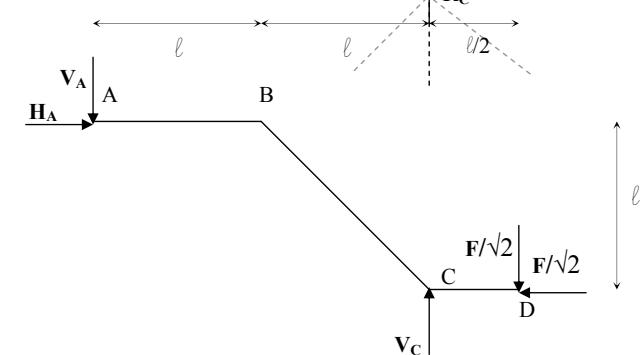
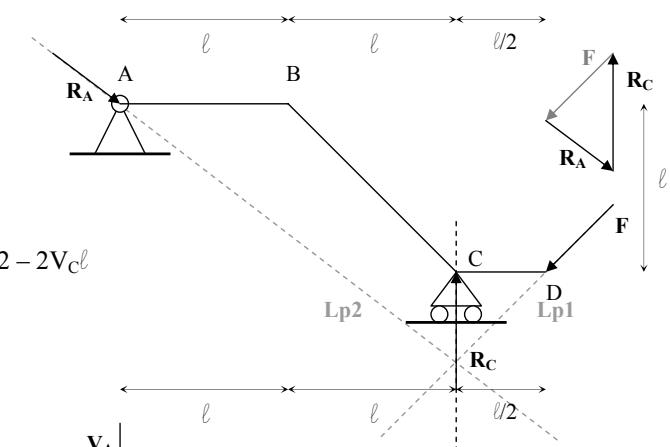
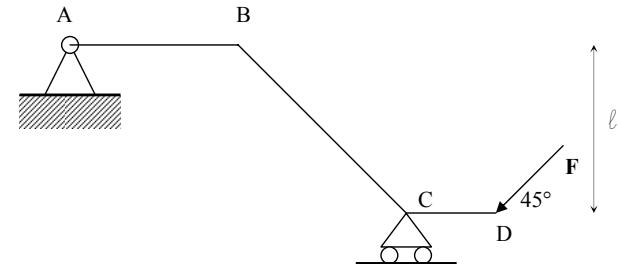
$$\sum H_i = 0 \\ H_A - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow H_A = F/\sqrt{2}$$

$$\sum V_i = 0 \\ -V_A + F/\sqrt{2} + V_C = 0$$

$$\sum M_A = 0 \\ M - F/\sqrt{2} \cdot l - F/\sqrt{2} \cdot 5l/2 + \\ + V_C \cdot 2l = 0 \rightarrow M = 7Fl/2\sqrt{2} - 2V_C l \\ \rightarrow V_C = 7F/4\sqrt{2} \\ \rightarrow V_A = 3F/4\sqrt{2}$$

Lp1 valida da D a C

Lp2 valida da C ad A



VINCOLI ED EQUILIBRIO

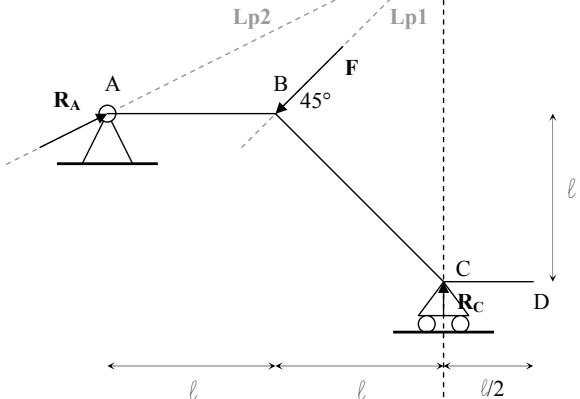
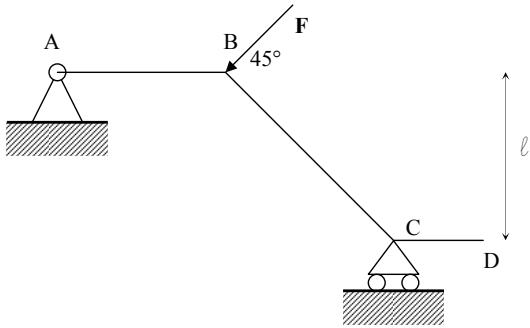
Esercizio n.08

$$\sum H_i = 0 \\ H_A - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow [H_A = F/\sqrt{2}]$$

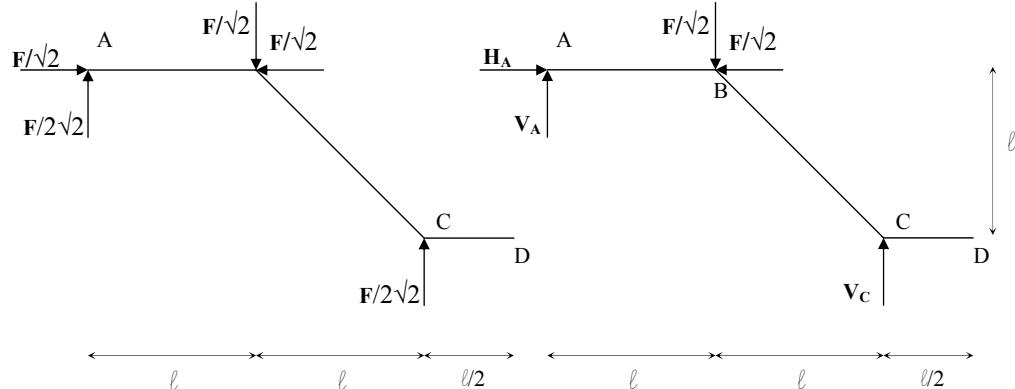
$$\sum V_i = 0 \\ V_A - F/\sqrt{2} + V_C = 0$$

$$\sum M_A = 0 \\ M - F/\sqrt{2} \cdot l + V_C \cdot 2l = 0 \\ \rightarrow M = Fl/\sqrt{2} - 2V_C l \\ \rightarrow [V_C = F/2\sqrt{2}] \\ \rightarrow [V_A = F/2\sqrt{2}]$$

Lp1 valida da C a B
Lp2 valida da B ad A



La soluzione di questo esercizio può essere addizionata a quella del precedente
→ in caso di molteplici forze agenti il sistema può essere scomposto ed analizzato per parti.

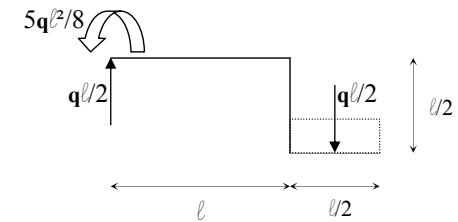
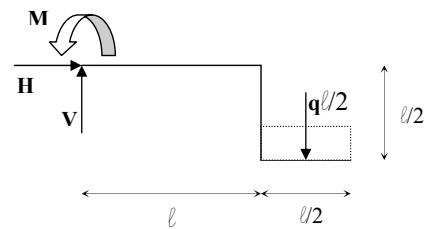
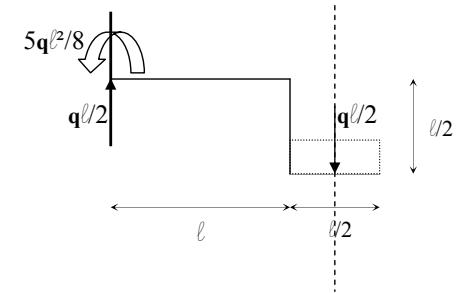
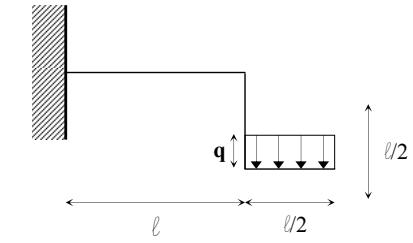


Esercizio n.09

$$\sum H_i = 0 \\ H = 0$$

$$\sum V_i = 0 \\ V - ql/2 = 0 \rightarrow [V = ql/2]$$

$$\sum M_i = 0 \\ M - ql/2 \cdot 5l/4 = 0 \\ \rightarrow [M = 5ql^2/8]$$

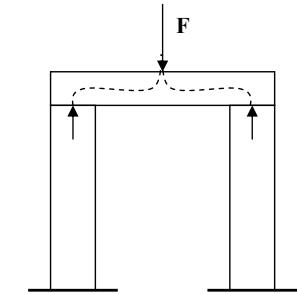


A.3 CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

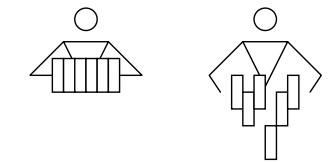
STATICHE DELLA TRAVE

Come viene sollecitato ogni punto della trave?

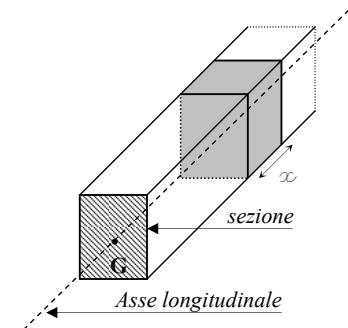
La materia trasmette le forze da un punto all'altro fino a farle giungere nei vincoli. È necessario quindi analizzare le *caratteristiche di sollecitazione interna* della trave.



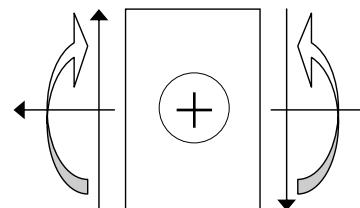
Divedendo la trave in n sezioni, ogni sezione della trave risulterebbe come "incollata", solidale alla successiva. Ad esempio, immaginando di sorreggere una pila di libri, spingendo ai lati rimane unita, ma se la forza viene meno il tutto crolla.



Nell'analisi viene idealmente considerato un concio di trave, e cioè una parte di trave compresa fra due sezioni della stessa, eseguite a distanza ∞ fra loro.



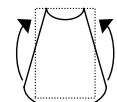
Convenzione positiva in un concio di trave.



- *Sforzo Normale* $\leftarrow [N] \rightarrow$: due forze uguali in direzione ed opposte in verso; azioni lungo l'asse della trave di trazione (positive) e compressione (negative).

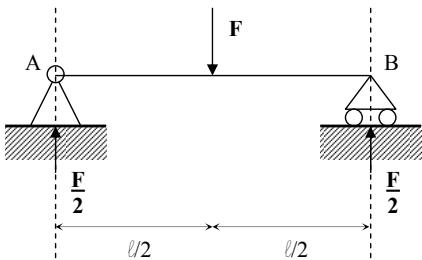
- *Taglio* $\uparrow [T] \downarrow$: tensioni tangenziali, positive se il concio ruota in senso orario.

- *Momento Flettente* $\curvearrowleft [M] \curvearrowright$: due coppie di forze uguali ed opposte; il momento flettente è positivo se l'azione tende le fibre inferiori della trave \rightarrow

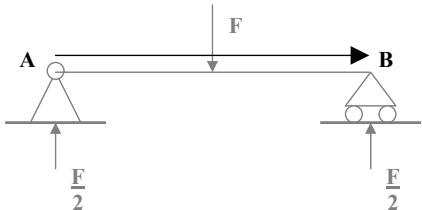


CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

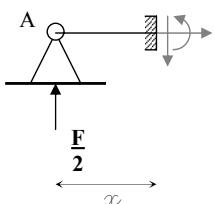
E' possibile tradurre in forma analitica e grafica le caratteristiche di sollecitazione interna. Prendendo ad esempio la seguente struttura:



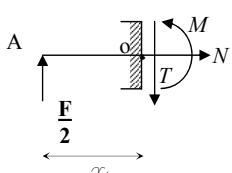
- a. decidere un verso di percorrenza dell'oggetto, per esempio da A a B.



- b. eliminare una parte della struttura.



- c. Ovviamente bisogna porre qualcosa in sostituzione della parte di struttura che viene eliminata, in quanto non sussiste più l'equilibrio; e qui entrano in gioco le caratteristiche di sollecitazione interna.



Tutto ciò funziona fintantoché la sezione non incontra la forza applicata F, quindi:

$$0 \leq x \leq l/2$$

$$\vec{N} \rightarrow N = 0$$

→ nel sistema non è applicata nessuna forza che produca azioni di trazione o compressione.

$$\downarrow T \rightarrow T - F/2 = 0 \rightarrow T = F/2$$

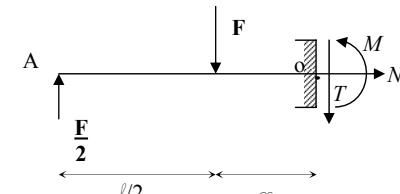
$$\vec{M}_o \rightarrow M - F/2 \cdot x = 0 \rightarrow M = F/2 \cdot x$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = l/2 \rightarrow M = F \cdot l/4$$

- d. continuare l'analisi per la restante parte della struttura.

N.b. vanno eseguite tante sezioni quante sono le parti di struttura divise da applicazioni di forze; in questo caso le sezioni significative sono due.



$$l/2 \leq x \leq l$$

$$\vec{N} \rightarrow N = 0$$

$$\downarrow T \rightarrow T - F/2 + F = 0 \rightarrow T = -F/2$$

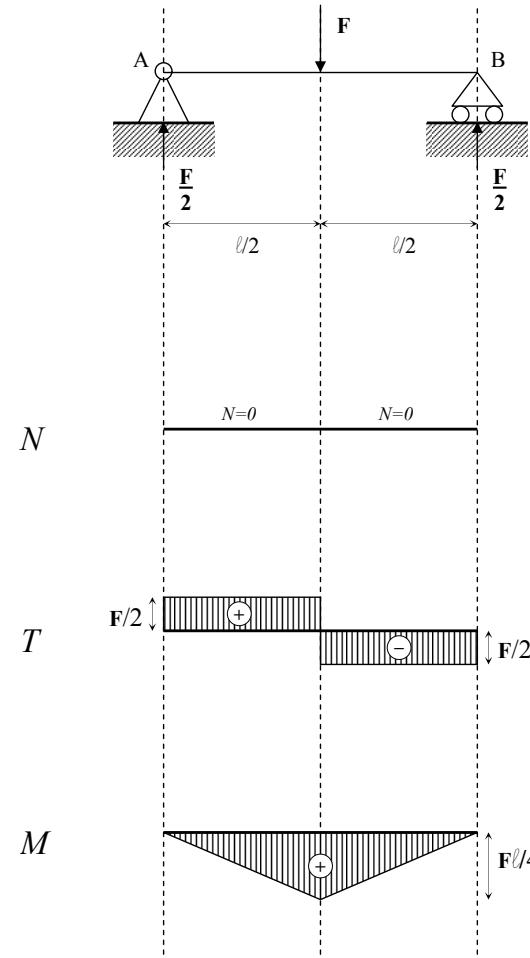
→ una forza concentrata fa saltare il taglio dell'entità della forza stessa.

$$\vec{M}_o \rightarrow M - F/2 \cdot (x + l/2) + F \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = F \cdot l/4$$

$$\text{per } x = l \rightarrow M = 0$$

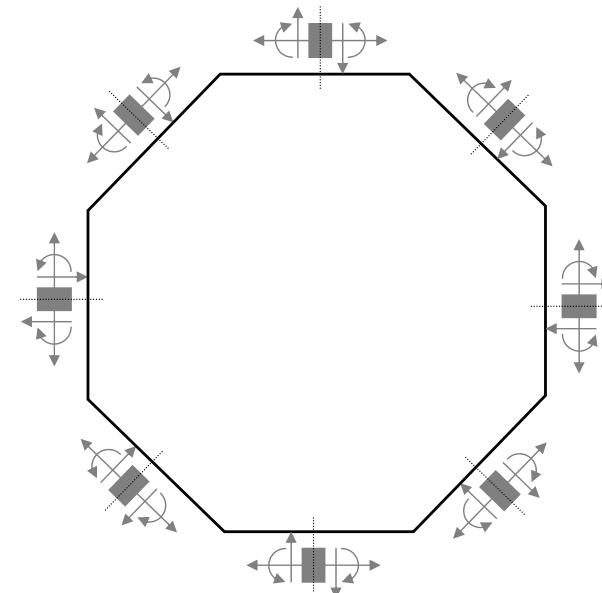
e. riassumere graficamente.



Scegliendo il verso di percorrenza opposto i risultati non cambiano, ma per iniziare l'analisi è necessario girare considerare l'altro lato del concio.

$0 \leq x \leq l/2$
 $\leftarrow \bar{N} \rightarrow \boxed{N=0}$
 $\uparrow \bar{T} \rightarrow T + F/2 = 0 \rightarrow \boxed{T = -F/2}$
 $\curvearrowleft \bar{M}_0 \rightarrow M - F/2 \cdot x = 0 \rightarrow M = F/2 \cdot x$
 per $x = 0 \rightarrow \boxed{M = 0}$
 per $x = l/2 \rightarrow \boxed{M = F \cdot l/4}$

Rotazione del concio di convenzione positiva nelle strutture.



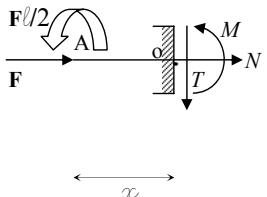
CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Esercizio n.10

$$\sum H_i = 0 \\ H - F = 0 \rightarrow [H = F]$$

$$\sum V_i = 0 \\ [V = 0]$$

$$\sum M_i = 0 \\ M - F \cdot \ell/2 = 0 \rightarrow [M = F\ell/2]$$



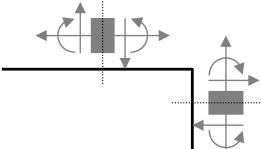
seziona 01

$$0 \leq x \leq \ell$$

$$\vec{N} \rightarrow N + F = 0 \rightarrow [N = -F]$$

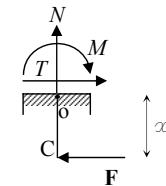
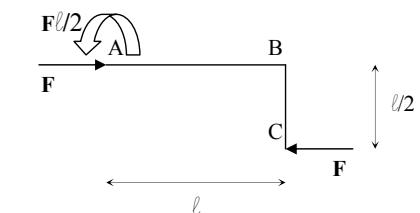
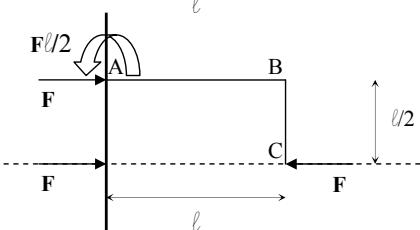
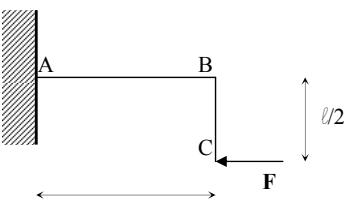
$$\downarrow T \rightarrow [T = 0]$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M + F\ell/2 = 0 \rightarrow [M = -F\ell/2]$$



Considerazioni

Ricordare sempre di ruotare il concio di convenzione positiva nel modo giusto (vedi schematizzazione sovrastante).



seziona 02

$$0 \leq x \leq \ell/2$$

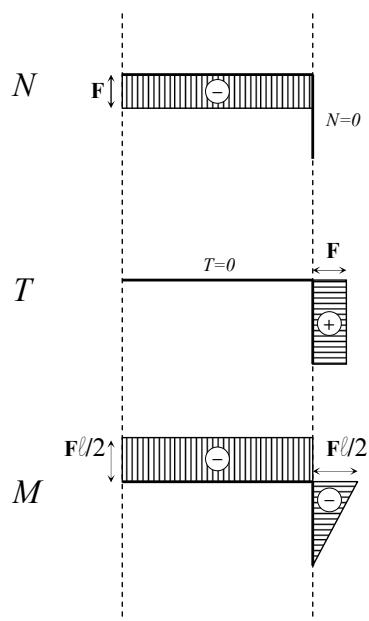
$$\uparrow N \rightarrow [N = 0]$$

$$\rightarrow T \rightarrow T - F = 0 \rightarrow [T = F]$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M + Fx = 0 \rightarrow M = -Fx$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow [M = -F\ell/2]$$



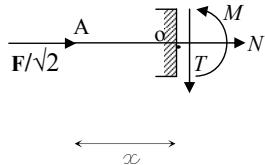
Esercizio n.11

$$\sum H_i = 0 \\ H_A - F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow H_A = F/\sqrt{2}$$

$$\sum V_i = 0 \\ V_A - F/\sqrt{2} + V_D = 0$$

$$\sum M_A = 0 \\ M - F/\sqrt{2} \cdot 3l/2 - F/\sqrt{2} \cdot l/2 + V_D \cdot 2l = 0 \\ \rightarrow M = 2Fl/\sqrt{2} - 2V_D \\ \rightarrow V_D = F/\sqrt{2} \\ \rightarrow V_A = 0$$

Lp1 valida da D a C
Lp2 valida da C ad A

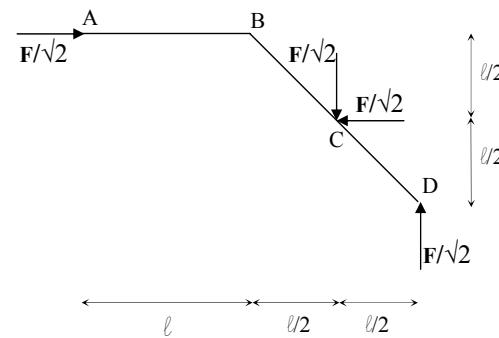
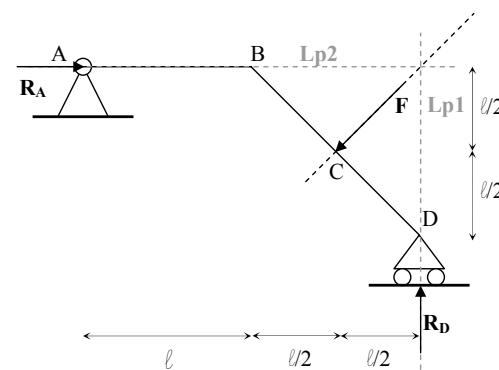
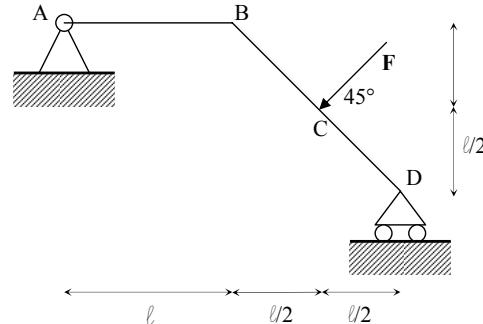


$$\text{seziona 01} \\ 0 \leq x \leq l$$

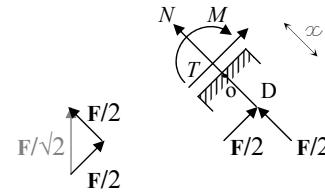
$$\vec{N} \rightarrow N + F/\sqrt{2} = 0 \rightarrow N = -F/\sqrt{2}$$

$$\downarrow T \rightarrow T = 0$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M = 0$$



STATICA DELLA TRAVE



seziona 02

$$0 \leq x \leq l\sqrt{2}/2$$

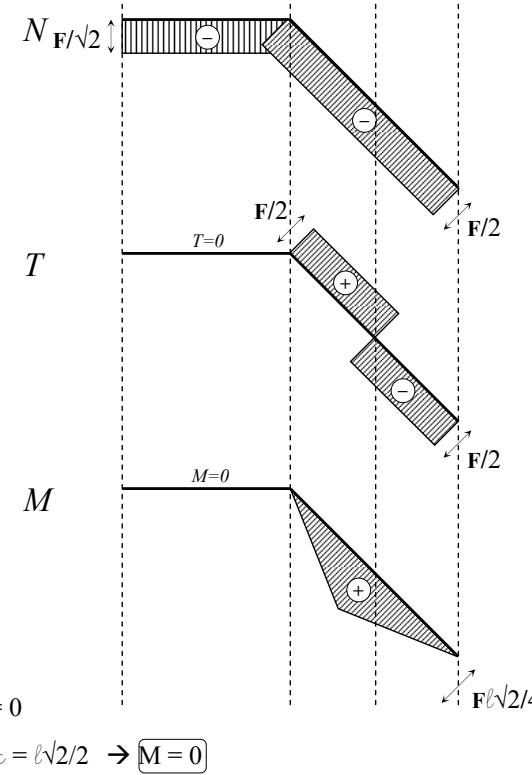
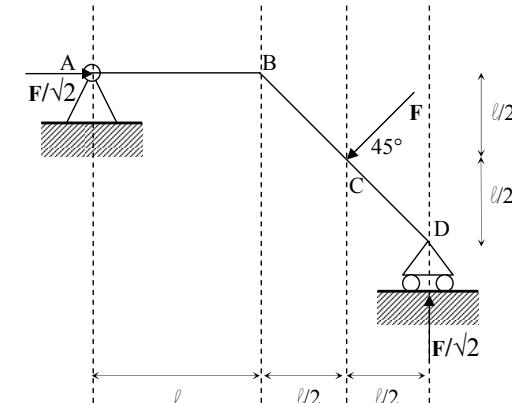
$$\nearrow N \rightarrow N + F/2 = 0 \rightarrow N = -F/2$$

$$\nearrow T \rightarrow T + F/2 = 0 \rightarrow T = -F/2$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M - F/2 \cdot x = 0 \rightarrow M = Fx/2$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = l\sqrt{2}/2 \rightarrow M = Fl\sqrt{2}/4$$



seziona 03

$$0 \leq x \leq l\sqrt{2}/2$$

$$\nearrow N \rightarrow N + F/2 = 0 \rightarrow N = -F/2$$

$$\nearrow T \rightarrow T + F/2 - F = 0 \rightarrow T = F/2$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M - F/2 \cdot (x + l\sqrt{2}/2) + Fx = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = Fl\sqrt{2}/4$$

$$\text{per } x = l\sqrt{2}/2 \rightarrow M = 0$$

Rapporti fra taglio, momento e linee delle pressioni.

È possibile tracciare intuitivamente il grafico del momento flettente a partire dalla linea delle pressioni, sapendo che:

- nei punti di intersezione o identità fra linea delle pressioni e struttura il momento è zero.
- in caso di parallelismo fra struttura e linea delle pressioni, il momento sarà una costante.
- più è grande la distanza fra la linea delle pressioni e la struttura, più si verificherà momento.
- se la linea delle pressioni è di compressione, il momento è situato all'opposto di essa rispetto all'asse della trave; se di trazione, il momento è situato dallo stesso lato della linea delle pressioni.

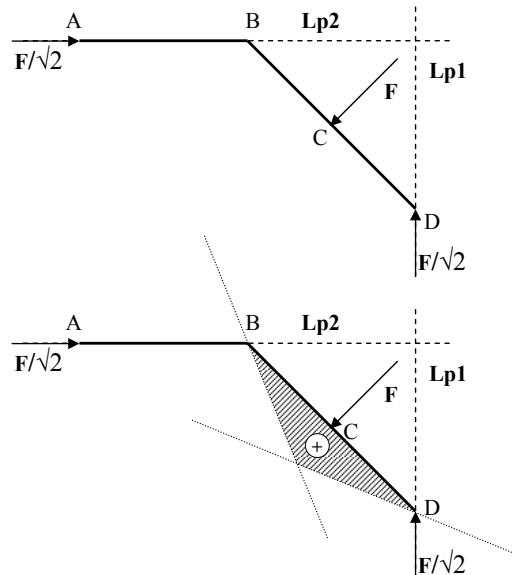
Ad esempio, nel precedente esercizio:

- fra A e B la Lp_2 coincide con la struttura \rightarrow il momento sarà zero nel tratto di coincidenza.
- in D la Lp_1 interseca la struttura \rightarrow il momento sarà zero nel punto di intersezione.
- fra B e C la Lp_2 si allontana dalla struttura \rightarrow il momento, partendo da zero, andrà via via aumentando fino a C.
- fra C e D è valida la Lp_1 , e si avvicina alla struttura \rightarrow il momento, partendo dal suo massimo in C, andrà via via diminuendo fino a zero in D.
- Le linee Lp_1 ed Lp_2 sono di compressione, quindi il momento sarà disegnato dal lato opposto ad esse, con asse la struttura.

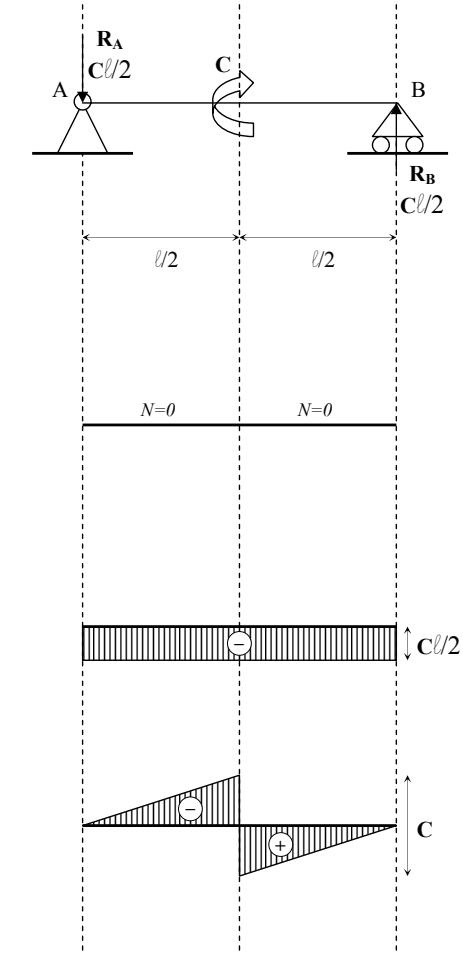
Inoltre, il diagramma del taglio è la derivata del diagramma del momento.
Da ciò si può dedurre:

- se il taglio è zero in un tratto, il momento sarà costante o zero.
- se il taglio è costante, il momento sarà un'inclinata; il taglio in questo caso è il coefficiente angolare del momento.
- se il taglio è un'inclinata, il momento sarà parabolico; e così via.
- se il taglio è zero in un punto, il momento avrà un massimo, un minimo od un flesso, come matematica insegnava.

Per conferma di quanto detto, vedere l'esempio precedente.



N.b. il taglio è una caratteristica di tipo forza, e quindi salta quando incontra forze applicate; il momento, di conseguenza, salta incontrando una coppia applicata.



\rightarrow il taglio non percepisce la coppia
 \rightarrow il coefficiente angolare nel momento è uguale, come si desume dal diagramma di taglio, ma il diagramma di momento salta in corrispondenza della coppia.

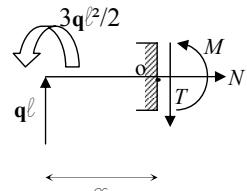
STATICÀ DELLA TRAVE

Esercizio n.12

$$\sum H_i = 0$$

$$\sum V_i = 0$$

$$\sum M_i = 0$$



sezione 01

$$0 \leq x \leq 2\ell$$

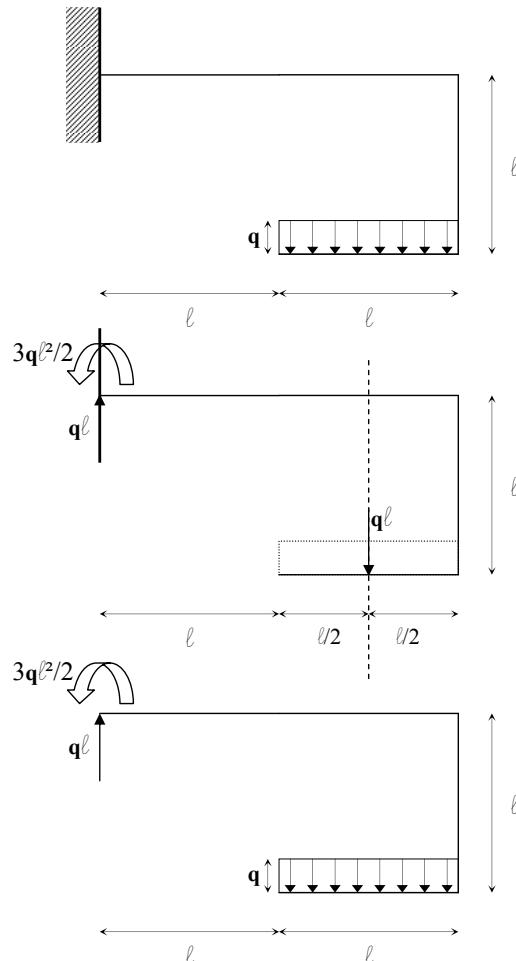
$$\vec{N} \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$\downarrow T \rightarrow T - q\ell = 0 \rightarrow T = q\ell$$

$$\overset{\curvearrowleft}{M}_0 \rightarrow M + 3q^{\ell^2/2} - q^{\ell^*} x$$

$$\text{per } \alpha = 3/2^l \Rightarrow M = 3\alpha^{l/2}/2 = 3\alpha^{l/2}/2 = 0 \Rightarrow M = 0$$

$$\text{per } \infty \equiv 2\ell \Rightarrow M \equiv 3a\ell^2/2 - 2a\ell^2 \equiv 0 \Rightarrow M \equiv a\ell^2/2$$



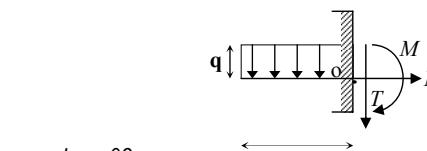
sezione 02

$$0 \leq x \leq l$$

$$\downarrow N \rightarrow N - q\ell = 0 \rightarrow \boxed{N = q\ell}$$

$$\overbrace{M}_0 \rightarrow M + 3q^{\ell^2/2} - q^{*\ell^2/2} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{M = q^{\ell^2/2}}$$



sezione 03

$$0 \leq x \leq l$$

$$\downarrow T \rightarrow T + \mathbf{q}_x = 0 \rightarrow T = -\mathbf{q}_x$$

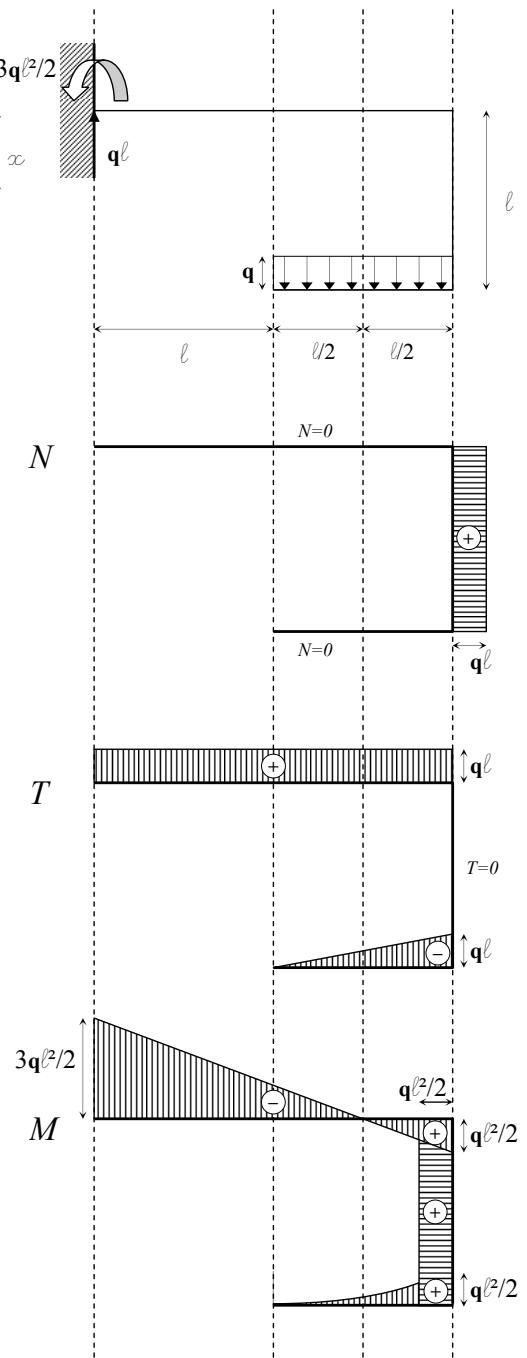
per $\alpha \equiv 0 \rightarrow T \equiv 0$

per $x = l \Rightarrow T = -a^l$

$$M_0 \Rightarrow M - a_{\infty}^* \alpha / 2 = 0$$

$$\text{par}_{\infty} = 0 \Rightarrow M = 0$$

per $x = \ell \rightarrow M = a\ell^2/2$



CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Esercizio n.13

$$\sum H_i = 0$$

$$H = 0$$

$$\sum V_i = 0$$

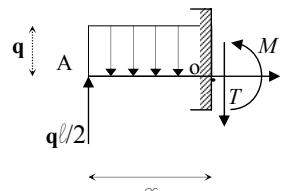
$$V_A + V_B - q\ell = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M - q\ell * \ell/2 + V_B * \ell = 0$$

$$\rightarrow V_B = q\ell/2$$

$$\rightarrow V_A = q\ell/2$$



seziona 01

$$0 \leq x \leq l$$

$$\vec{N} \rightarrow [N=0]$$

$$\downarrow T \rightarrow T - q\ell/2 + qx = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [T = q\ell/2]$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow T = q\ell/2 - q\ell/2 \rightarrow [T = 0]$$

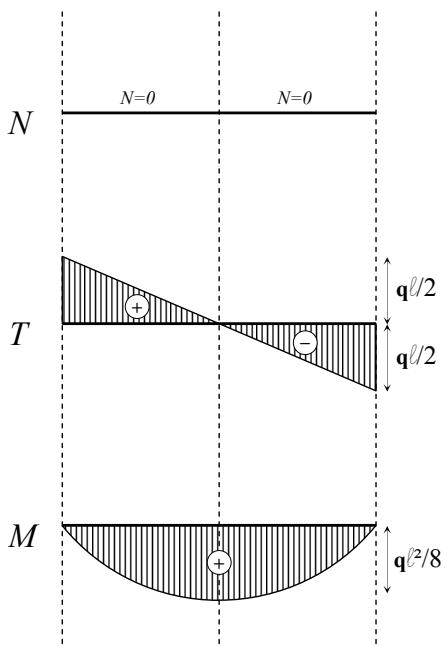
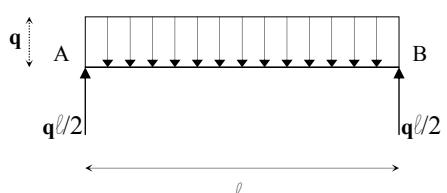
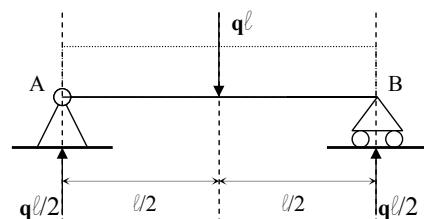
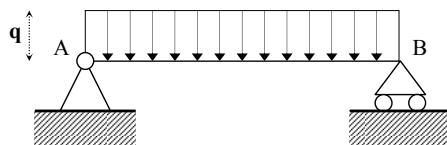
$$\text{per } x = \ell \rightarrow T = q\ell/2 - q\ell \rightarrow [T = -q\ell/2]$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M - q\ell/2 * x + qx * x/2 = 0$$

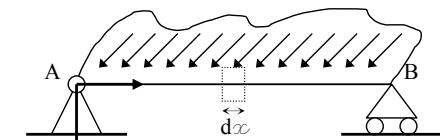
$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow M = q\ell^2/4 - q\ell^2/8 \rightarrow [M = q\ell^2/8]$$

$$\text{per } x = \ell \rightarrow M = q\ell^2/2 - q\ell^2/2 \rightarrow [M = 0]$$

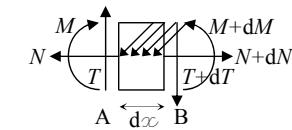
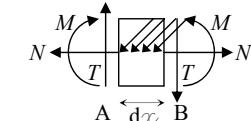


Momento, taglio e sforzo normale in termini differenziali.

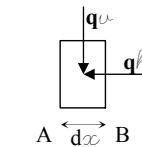


Prendendo una piccola parte di carico dx , si nota che il carico è variabile, ma la porzione considerata è tanto piccola da essere costante.

Da A a B ci si sposta di dx , e di conseguenza le azioni non sono uguali; quindi viene applicato un piccolo incremento d .



Dopo aver individuato le risultanti della piccola porzione di carico obliqua preso in considerazione, è possibile calcolare l'equilibrio del concio.



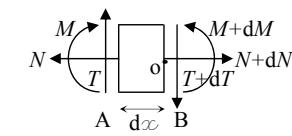
$$N \rightarrow N - qh * dx + N + dN = 0 \rightarrow qh = \frac{dN}{dx} \text{ (derivata N)}$$

$$T \rightarrow T - qv * dx - (T + dT) = 0 \rightarrow -qv * dx - dT = 0 \rightarrow qv = \frac{dT}{dx} \text{ (derivata T)}$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow -T * dx - M + qv * dx^2/2 + M + dM = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = T \text{ (derivata M)}$$

$$\rightarrow M = \int T$$

N.b. $dx^2/2$ è un infinitesimo di ordine superiore, trascurabile rispetto agli altri termini dell'equazione.



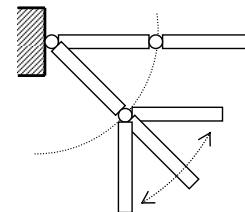
STATICHE DELLA TRAVE

La cerniera interna.

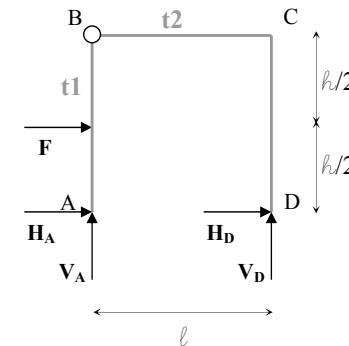
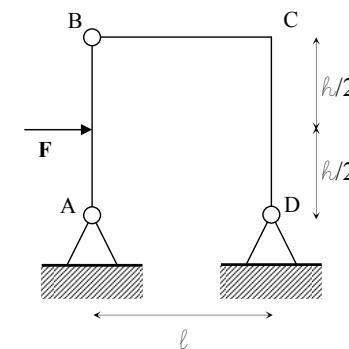
Trattasi di un particolare vincolo che, come la normale cerniera, *non può trasmettere momento*.

Ogni trave ha tre gradi di libertà; la cerniera interna è un vincolo doppio, ed impedisce due gradi di libertà. Due travi posseggono sei gradi di libertà, e vincolate con tre vincoli cerniera, impedenti ognuno due gradi di libertà, formano una struttura isostatica (a fianco).

La cerniera interna è comunque mobile. →



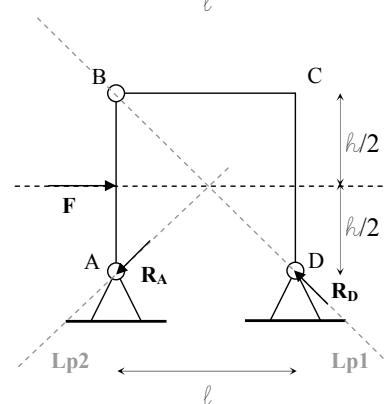
È evidente che non si posseggono sufficienti dati noti per la soluzione del problema (troppe incognite) → è necessario scrivere un'equazione ausiliaria di equilibrio del momento, calcolando nel punto di cerniera interna (B); tale equazione è relativa al troncone **t1** o **t2** della struttura → i due tronconi possono essere calcolati separatamente, ponendo che in B i momenti dei medesimi sono nulli.



La linea delle pressioni deve passare per le cerniere, poiché è noto a priori che in tali punti non si verifica momento.

Da B a D non sono presenti carichi, quindi la Lp1 deve essere regolata dalla reazione di D, e passare per la cerniera in D e la cerniera interna in B.

Tracciare la linea d'azione di F; prolungando dall'intersezione con la Lp1 in A si individua la Lp2.



$$\sum H_i = 0 \\ F - H_A - H_D = 0$$

$$\sum V_i = 0 \\ V_A - V_D = 0 \rightarrow V_A = V_D$$

$$\sum M_A = 0 \\ M - F \cdot h/2 + V_D \cdot l = 0 \\ \rightarrow V_D = Fh/2l \\ \rightarrow V_A = Fh/2l$$

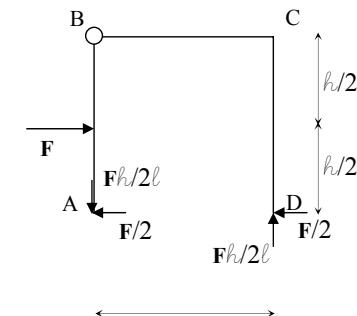
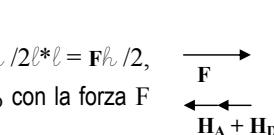
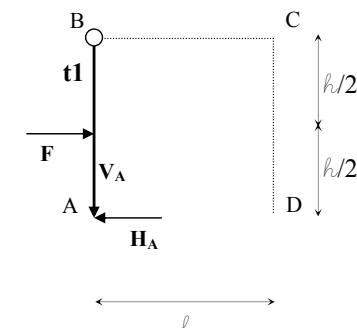
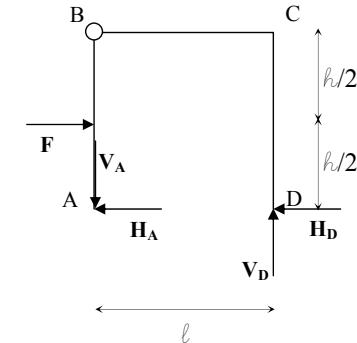
→ le equazioni, come previsto, non sono sufficienti alla risoluzione del problema. → si ricorre all'equazione ausiliaria.

$$\sum M_B \text{ (cerniera interna)} = 0 \\ \text{parte sinistra della struttura t1}$$

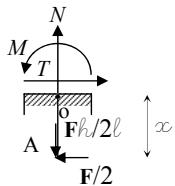
N.b. scegliere nell'analisi sempre la parte di struttura che è utile ai fini del calcolo, e cioè dove si trovano forze applicate note.

$$M + F \cdot h/2 - H_A \cdot h = 0 \\ \rightarrow H_A = F/2 \\ \rightarrow H_B = F/2$$

N.b. V_A e V_B formano una coppia positiva di valore $Fh/2l \cdot l = Fh/2$, controbilanciata dalla coppia che formano le reazioni $H_A + H_D$ con la forza F pari a $F \cdot h/2 = Fh/2$, negativa → situazione di equilibrio.



CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE



sezione 01

$0 \leq x \leq h/2$

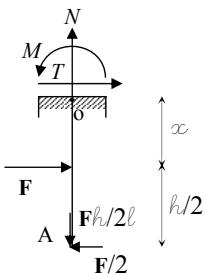
$$\uparrow N \rightarrow N - Fh/2l = 0 \rightarrow [N = Fh/2l]$$

$$\vec{T} \rightarrow T - F/2 = 0 \rightarrow [T = F/2]$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M - F/2 \cdot x = 0 \rightarrow M = Fx/2$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = h/2 \rightarrow [M = Fh/4]$$



sezione 02

$0 \leq x \leq h/2$

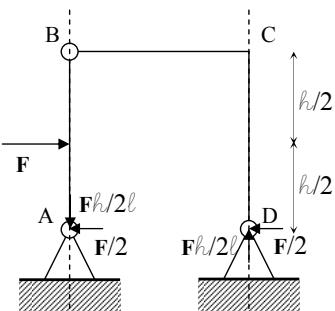
$$\uparrow N \rightarrow N - Fh/2l = 0 \rightarrow [N = Fh/2l]$$

$$\vec{T} \rightarrow T - F/2 + F = 0 \rightarrow [T = -F/2]$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M - F/2 \cdot (x + h/2) + F \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = Fh/4]$$

$$\text{per } x = h/2 \rightarrow M = -Fh/4 - Fh/4 + Fh/2 \rightarrow [M = 0]$$



sezione 03

$0 \leq x \leq h$

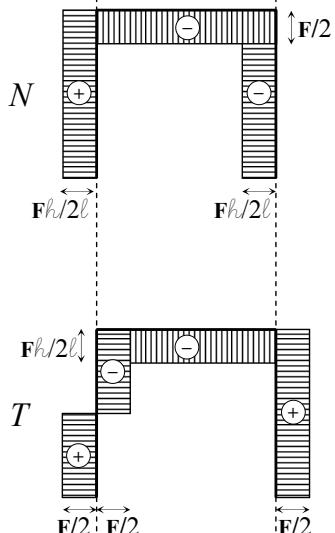
$$\uparrow N \rightarrow N + Fh/2l = 0 \rightarrow [N = -Fh/2l]$$

$$\vec{T} \rightarrow T - F/2 + F = 0 \rightarrow [T = F/2]$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M + F/2 \cdot x = 0$$

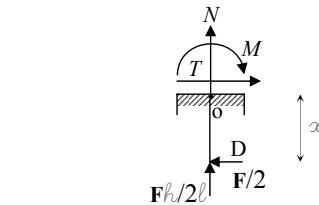
$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = h \rightarrow [M = -Fh/2]$$



sezione 04

$0 \leq x \leq l$



$$\overleftarrow{N} \rightarrow N + F/2 = 0 \rightarrow [N = -F/2]$$

$$\vec{T} \rightarrow T + Fh/2l = 0 \rightarrow [T = -Fh/2l]$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M + F/2 \cdot h - Fh/2l \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = -Fh/2]$$

$$\text{per } x = l \rightarrow M = -Fh/2 + Fh/2 \rightarrow [M = 0]$$

STATICA DELLA TRAVE

Esercizio n.14

$$\sum H_i = 0 \\ H_A + H_D - q\ell/2 = 0$$

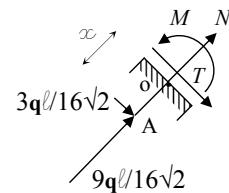
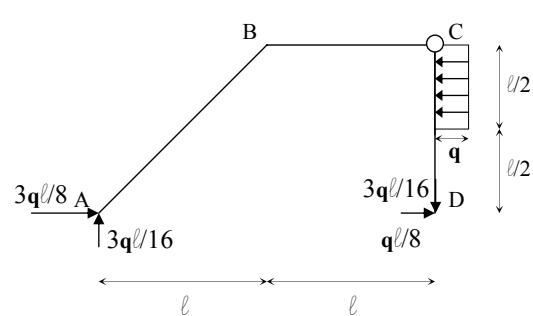
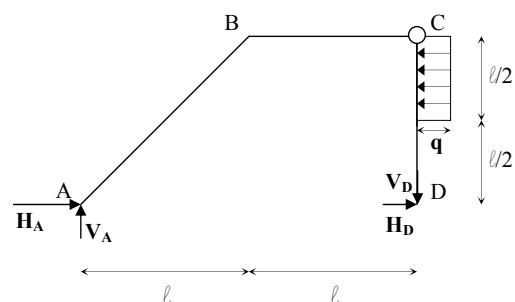
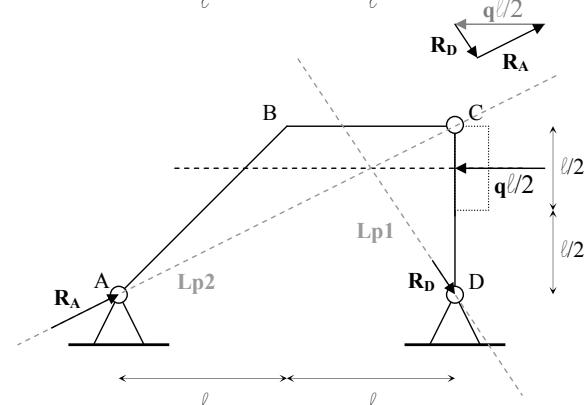
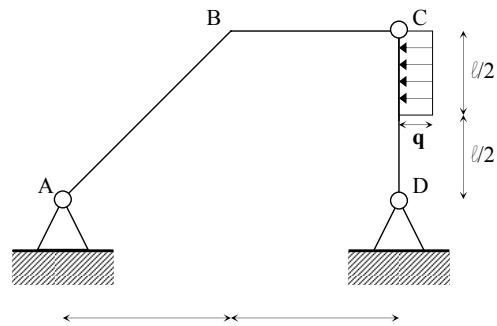
$$\sum V_i = 0 \\ V_A - V_D = 0 \rightarrow V_A = V_D$$

$$\sum M_A = 0 \\ M + q\ell/2 * 3\ell/4 - V_D * 2\ell = 0 \\ \rightarrow M = -3q\ell^2/8 + 2V_D\ell \\ \rightarrow [V_D = 3q\ell/16] \\ \rightarrow [V_A = 3q\ell/16]$$

$$\sum M_C = 0 \\ \text{parte destra della struttura rispetto a } C \\ M - q\ell/2 * \ell/4 + H_D * \ell = 0 \\ \rightarrow M = q\ell^2/8 - H_D\ell \\ \rightarrow [H_D = q\ell/8] \\ \rightarrow H_A = q\ell/2 - q\ell/8 \rightarrow [H_A = 3q\ell/8]$$

Lp1 valida da D a $q\ell/2$

Lp2 valida da $q\ell/2$ ad A



sezione 01

$$0 \leq x \leq \ell/2$$

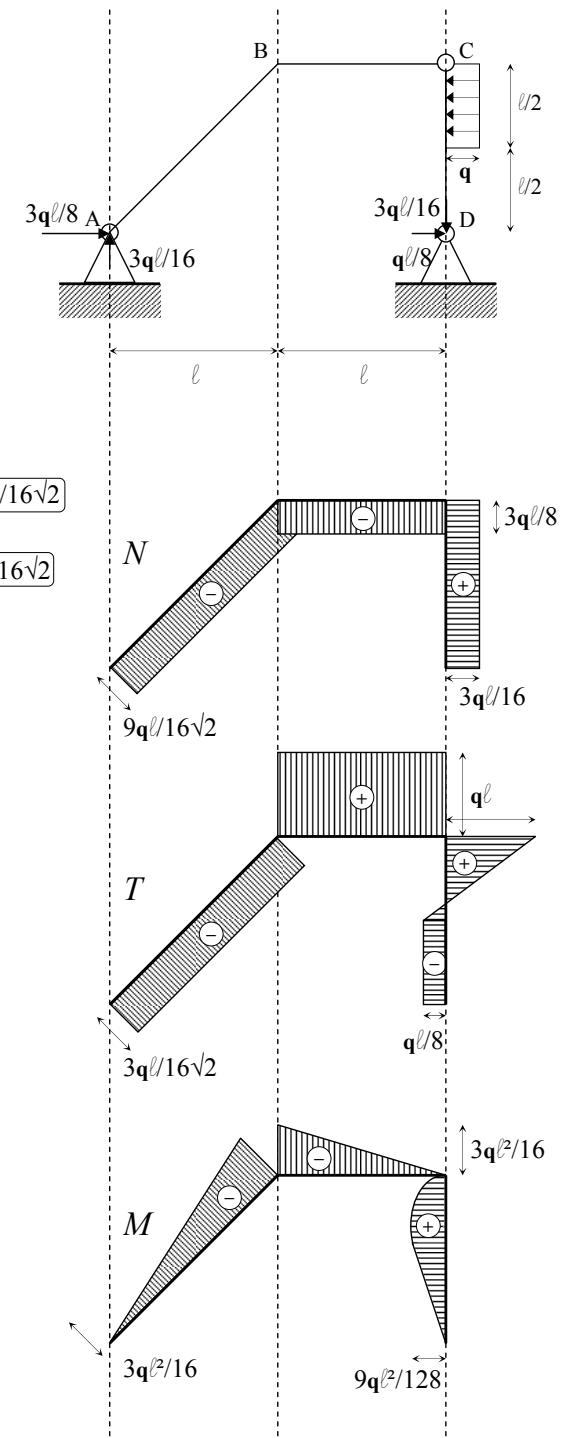
$$\rightarrow N \rightarrow N + 9q\ell/16\sqrt{2} = 0 \rightarrow [N = -9q\ell/16\sqrt{2}]$$

$$\rightarrow T \rightarrow T + 3q\ell/16\sqrt{2} = 0 \rightarrow [T = -3q\ell/16\sqrt{2}]$$

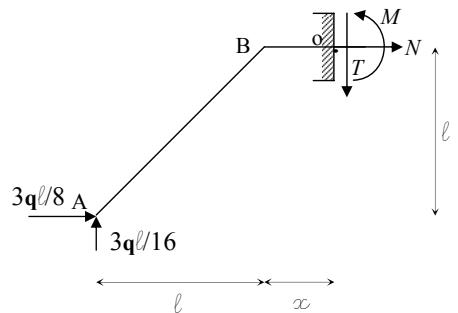
$$\rightarrow M \rightarrow M + 3q\ell/16\sqrt{2} * x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow [M = -3q\ell^2/16]$$



CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE



sezione 02

$$0 \leq x \leq l$$

$$\uparrow N \rightarrow N + 3q\ell/8 = 0 \rightarrow N = -3q\ell/8$$

$$\downarrow T \rightarrow T - 3q\ell/8 = 0 \rightarrow T = 3q\ell/8$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M - 3q\ell/16 * (x + \ell) + 3q\ell/8 * \ell = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = -3q\ell^2/16$$

$$\text{per } x = \ell \rightarrow M = 3q\ell^2/16 + 3q\ell^2/16 - 3q\ell^2/8 \rightarrow M = 0$$

sezione 03

$$0 \leq x \leq \ell/2$$

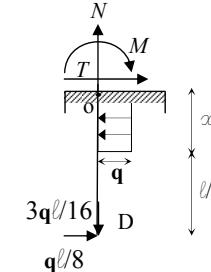
$$\uparrow N \rightarrow N - 3q\ell/16 = 0 \rightarrow N = 3q\ell/16$$

$$\rightarrow T \rightarrow T + q\ell/8 = 0 \rightarrow T = -q\ell/8$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M - q\ell/8 * x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow M = q\ell^2/16$$



sezione 04

$$0 \leq x \leq \ell/2$$

$$\uparrow N \rightarrow N - 3q\ell/16 = 0 \rightarrow N = 3q\ell/16$$

$$\rightarrow T \rightarrow T + q\ell/8 - qx = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow T = -q\ell/8$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow T = 3q\ell/8$$

$$\text{per } x = \ell/8 \rightarrow T = 0$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M - q\ell/8 * (\ell/2 + x) + qx * x/2 = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = q\ell^2/16$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow M = q\ell^2/16 + q\ell^2/16 - q\ell^2/8 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = \ell/8 \rightarrow M = q\ell^2/16 + q\ell^2/64 - q\ell^2/128 \rightarrow M = 9q\ell^2/128 \text{ (massimo)}$$

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

sezione 02

$$0 \leq x \leq \ell\sqrt{2}$$

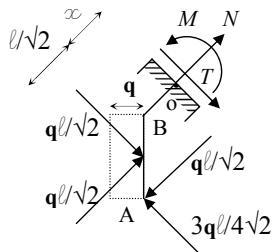
$$\nearrow N \rightarrow N + q\ell/\sqrt{2} - q\ell/\sqrt{2} = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\searrow T \rightarrow T + q\ell/\sqrt{2} - 3q\ell/4\sqrt{2} = 0 \rightarrow T = -q\ell/4\sqrt{2}$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M - q\ell/\sqrt{2} \cdot \ell/\sqrt{2} + q\ell/\sqrt{2} \cdot \ell/2\sqrt{2} + q\ell/\sqrt{2} \cdot (\ell/2\sqrt{2} + x) - 3q\ell/4\sqrt{2} \cdot (\ell/\sqrt{2} + x) = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = q\ell^2/2 - q\ell^2/4 - q\ell^2/4 + 3q\ell^2/8 \rightarrow M = 3q\ell^2/8$$

$$\text{per } x = \ell\sqrt{2} \rightarrow M = q\ell^2/2 - q\ell^2/4 - q\ell^2/4 - q\ell^2 + 3q\ell^2/8 + 3q\ell^2/4 \rightarrow M = q\ell^2/8$$



sezione 03

$$0 \leq x \leq \ell$$

$$\nearrow N \rightarrow N - 7q\ell/8 + q\ell = 0 \rightarrow N = -q\ell/8$$

$$\downarrow T \rightarrow T + q\ell/8 = 0 \rightarrow T = -q\ell/8$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M + q\ell/8 \cdot 3\ell/2 - 7q\ell/8 \cdot 2\ell + q\ell/8 \cdot (x + \ell) = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = -3q\ell^2/2 + 7q\ell^2/4 - q\ell^2/8 \rightarrow M = q\ell^2/8$$

$$\text{per } x = \ell \rightarrow M = -3q\ell^2/2 + 7q\ell^2/4 - q\ell^2/8 - q\ell^2/8 \rightarrow M = 0$$

sezione 04

$$0 \leq x \leq \ell$$

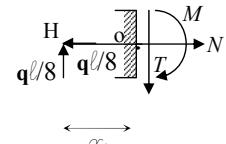
$$\nearrow N \rightarrow N - q\ell/8 = 0 \rightarrow N = q\ell/8$$

$$\downarrow T \rightarrow T - q\ell/8 = 0 \rightarrow T = q\ell/8$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M + q\ell/8 \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = \ell \rightarrow M = -q\ell^2/8$$



sezione 05

$$0 \leq x \leq \ell$$

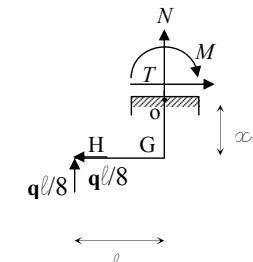
$$\nearrow N \rightarrow N + q\ell/8 = 0 \rightarrow N = -q\ell/8$$

$$\searrow T \rightarrow T - q\ell/8 = 0 \rightarrow T = q\ell/8$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M + q\ell/8 \cdot \ell + q\ell/8 \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = -q\ell^2/8$$

$$\text{per } x = \ell \rightarrow M = -q\ell^2/4$$



sezione 06

$$0 \leq x \leq 2\ell$$

$$\nearrow N \rightarrow N + q\ell/8 = 0 \rightarrow N = -q\ell/8$$

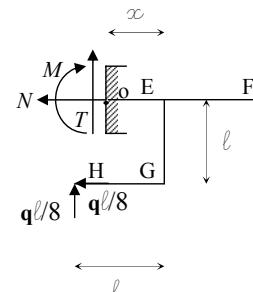
$$\searrow T \rightarrow T + q\ell/8 = 0 \rightarrow T = -q\ell/8$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M + q\ell/8 \cdot \ell + q\ell/8 \cdot (2\ell - x) = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = -q\ell^2/4$$

$$\text{per } x = \ell \rightarrow M = -q\ell^2/8$$

$$\text{per } x = 2\ell \rightarrow M = 0$$



Esercizio n.16

$$\sum H_i = 0$$

$$q\ell - H_E = 0 \rightarrow H_E = q\ell$$

$$\sum V_i = 0$$

$$V_A - V_E = 0 \rightarrow V_A = V_E$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$M + q^{\ell} \ast \ell/2 - V_A \ast \ell = 0$$

$$\rightarrow V_A = q\ell/2$$

$$\rightarrow V_E = q\ell/2$$

$$\Sigma M_E = 0$$

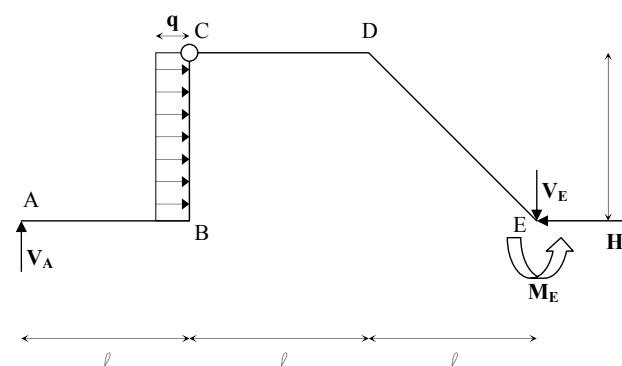
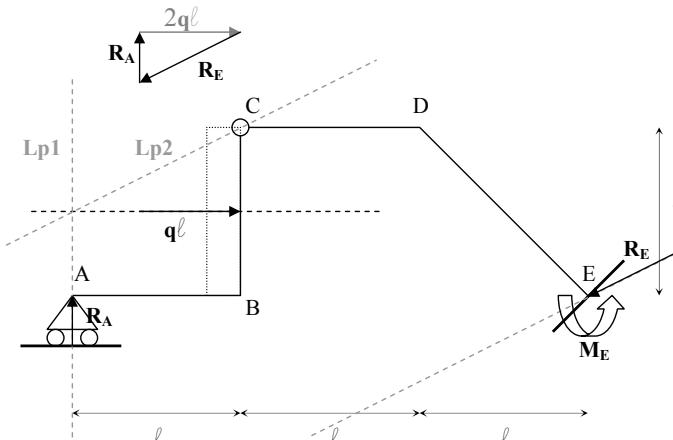
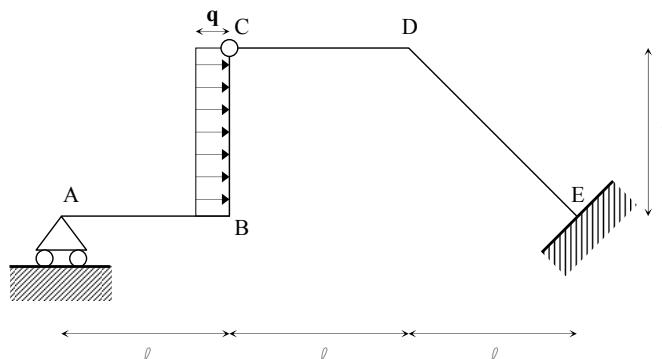
$$M_E - q^{\ell} * \ell / 2 - V_A * \ell = 0$$

$$\rightarrow M_F = q\ell^* \ell/2 + q\ell/2^* 3\ell$$

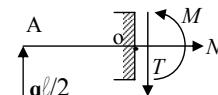
$$\rightarrow M_E = 2q\ell^2$$

Lp1 valida da A a q^l

Lp2 valida da q^{ℓ} ad E



STATICHE DELLA TRAVE



sezione 01

$$0 \leq x \leq l$$

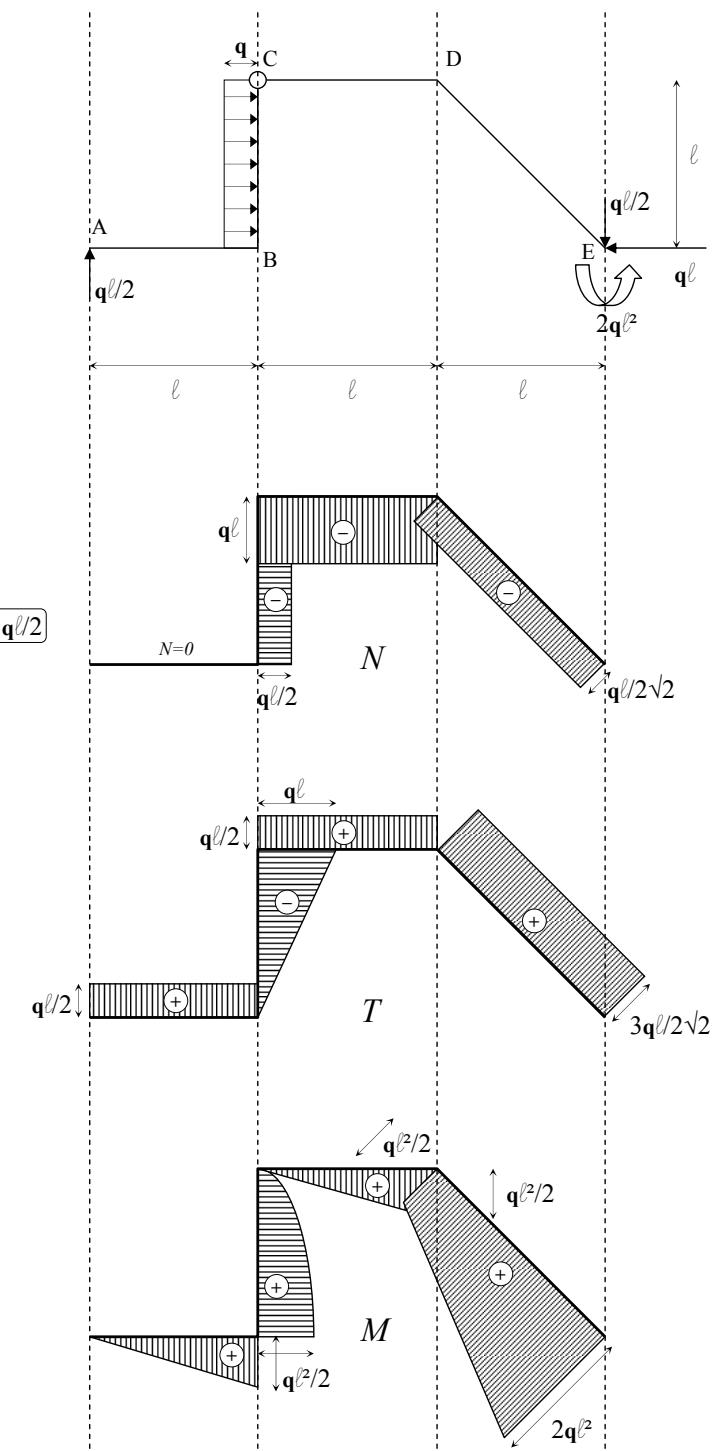
$$\vec{N} \rightarrow \boxed{N=0}$$

$$\downarrow T \rightarrow T - q\ell/2 = 0 \rightarrow T = q\ell/2$$

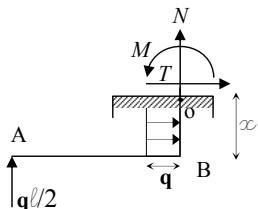
$$M_0 \rightarrow M - \mathbf{a}^{\ell/2} \ast x \equiv 0$$

per $\infty = 0 \rightarrow M = 0$

$$\text{per } x = l \rightarrow M = q l^2 / 2$$



CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE



seziona 02
 $0 \leq x \leq l$

$$\uparrow N \rightarrow N + q\ell/2 = 0 \rightarrow N = -q\ell/2$$

$$\rightarrow T \rightarrow T + qx = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow T = 0$$

$$\text{per } x = l \rightarrow T = -q\ell$$

$$\curvearrowright M_0 \rightarrow M - q\ell/2 * l + qx * x/2 = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = q\ell^2/2$$

$$\text{per } x = l \rightarrow M = q\ell^2/2 - q\ell^2/2 \rightarrow M = 0$$

seziona 04
 $0 \leq x \leq l$

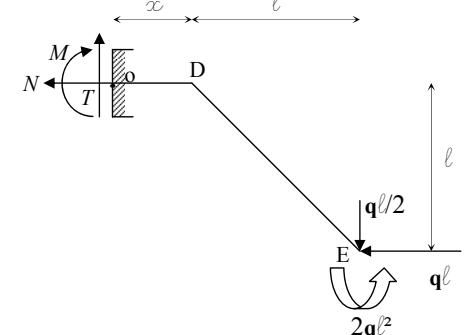
$$\overleftarrow{N} \rightarrow N + q\ell = 0 \rightarrow N = -q\ell$$

$$\uparrow T \rightarrow T - q\ell/2 = 0 \rightarrow T = q\ell/2$$

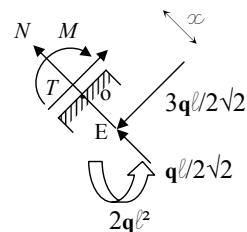
$$\curvearrowleft M_0 \rightarrow M + q\ell * l + q\ell/2 * (l + x) - 2q\ell^2 = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 2q\ell^2 - q\ell^2 - q\ell^2/2 \rightarrow M = q\ell^2/2$$

$$\text{per } x = l \rightarrow M = 2q\ell^2 - q\ell^2 - q\ell^2/2 - q\ell^2/2 \rightarrow M = 0$$



seziona 03
 $0 \leq x \leq l\sqrt{2}$



$$\nwarrow N \rightarrow N + q\ell/2\sqrt{2} = 0 \rightarrow N = -q\ell/2\sqrt{2}$$

$$\nearrow T \rightarrow T - 3q\ell/2\sqrt{2} = 0 \rightarrow T = 3q\ell/2\sqrt{2}$$

$$\curvearrowleft M_0 \rightarrow M + 3q\ell/2\sqrt{2} * x - 2q\ell^2 = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 2q\ell^2$$

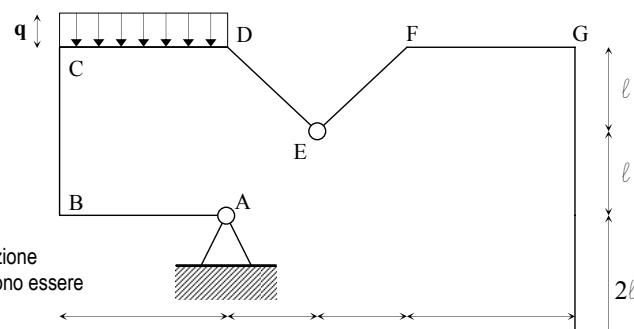
$$\text{per } x = l\sqrt{2} \rightarrow M = 2q\ell^2 - 3q\ell^2/2 \rightarrow M = q\ell^2/2$$

Esercizio n.17

$$\sum H_i = 0$$

$$H_H - H_A = 0 \rightarrow H_A = H_H$$

N.b. graficamente è possibile intuire il valore di V_H → la Lp1 ha un'inclinazione di 45° , quindi le componenti di R_A devono essere di uguale modulo → $V_H = H_H$



$$\sum V_i = 0$$

$$V_A - 2q\ell - V_H = 0$$

$$\sum M_H = 0$$

$$M + 2q\ell \cdot 5\ell - V_A \cdot 4\ell + H_A \cdot 2\ell = 0$$

$$\rightarrow 2H_A = 4V_A - 10q\ell$$

$$\rightarrow H_A = 2V_A - 5q\ell$$

$$\sum M_E = 0$$

parte sinistra della struttura rispetto a E

$$M + 2q\ell \cdot 2\ell - H_A \cdot \ell - V_A \cdot \ell = 0$$

$$\rightarrow M + 2q\ell \cdot 2\ell - (2V_A - 5q\ell) \cdot \ell - V_A \cdot \ell = 0$$

$$\rightarrow 4q\ell - 2V_A + 5q\ell - V_A = 0$$

$$\rightarrow 3V_A = 9q\ell \rightarrow V_A = 3q\ell$$

$$\rightarrow V_H = 3q\ell - 2q\ell$$

$$\rightarrow V_H = q\ell$$

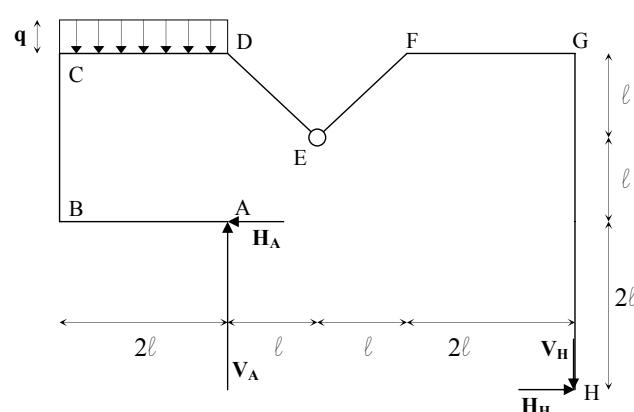
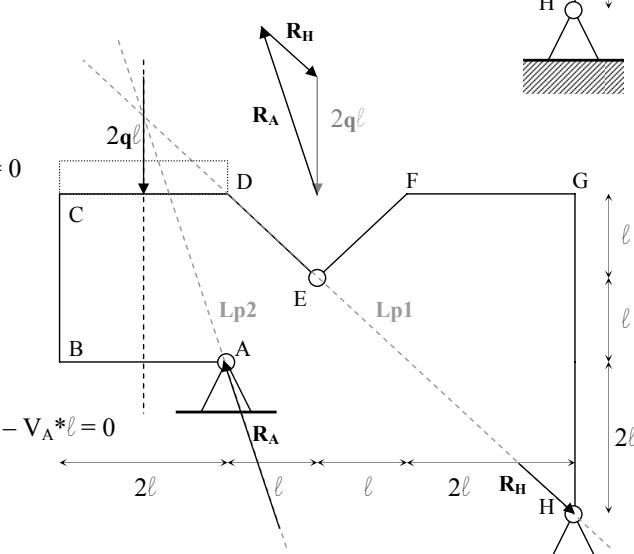
$$\rightarrow H_A = 2(3q\ell) - 5q\ell$$

$$\rightarrow H_A = q\ell$$

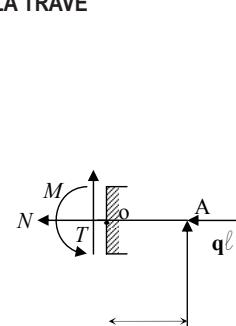
$$\rightarrow H_H = q\ell$$

Lp1 valida da H a $2q\ell$

Lp2 valida da $2q\ell$ ad A



STATICA DELLA TRAVE



sezione 01

$$0 \leq x \leq 2l$$

$$\rightarrow N + q\ell = 0 \rightarrow N = -q\ell$$

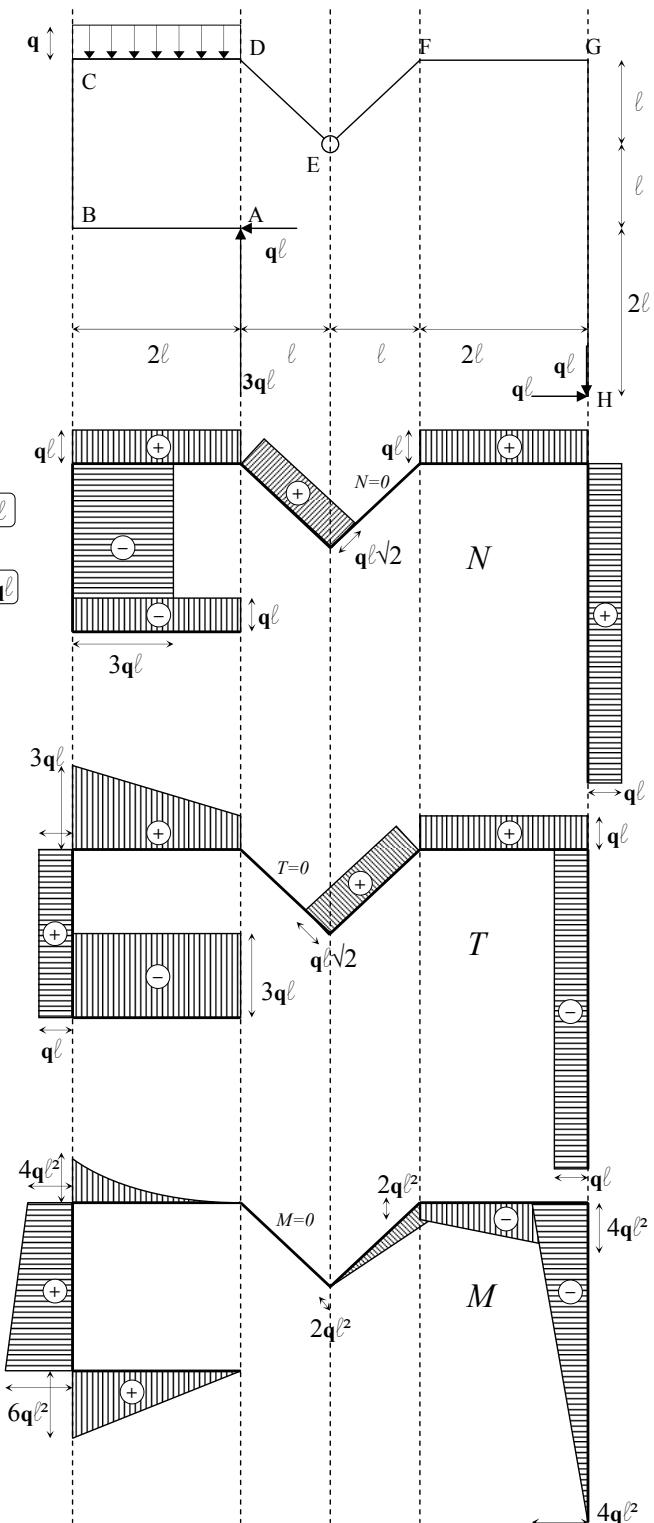
$$\rightarrow T + 3q\ell = 0 \rightarrow T = -3q\ell$$

$$\rightarrow M_0 \rightarrow M + 3q\ell \cdot x = 0$$

$$\rightarrow M = -3q\ell x$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = 2l \rightarrow M = -6q\ell^2$$



seziona 06

$$0 \leq x \leq 2l$$

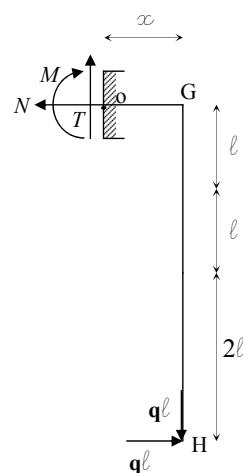
$$\leftarrow N \rightarrow N - q\ell = 0 \rightarrow [N = q\ell]$$

$$\uparrow T \rightarrow T - q\ell = 0 \rightarrow [T = q\ell]$$

$$(Mo \rightarrow M - q\ell \cdot 4l + q\ell \cdot x = 0)$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 4q\ell^2]$$

$$\text{per } x = 2l \rightarrow [M = 2q\ell^2]$$



seziona 07

$$0 \leq x \leq l\sqrt{2}$$

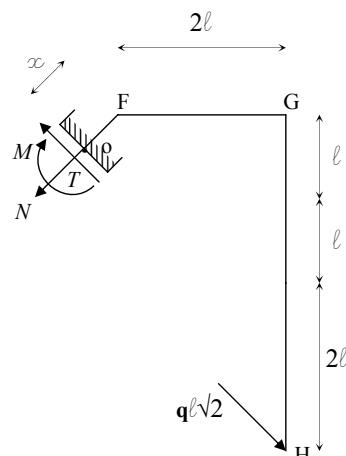
$$\checkmark N \rightarrow [N = 0]$$

$$\nearrow T \rightarrow T - q\ell\sqrt{2} = 0 \rightarrow [T = q\ell\sqrt{2}]$$

$$(Mo \rightarrow M - q\ell\sqrt{2} \cdot (l\sqrt{2} - x) = 0)$$

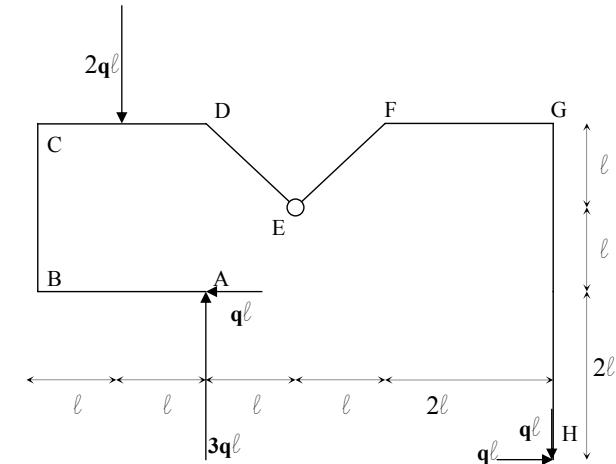
$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 2q\ell^2]$$

$$\text{per } x = l\sqrt{2} \rightarrow [M = 0]$$

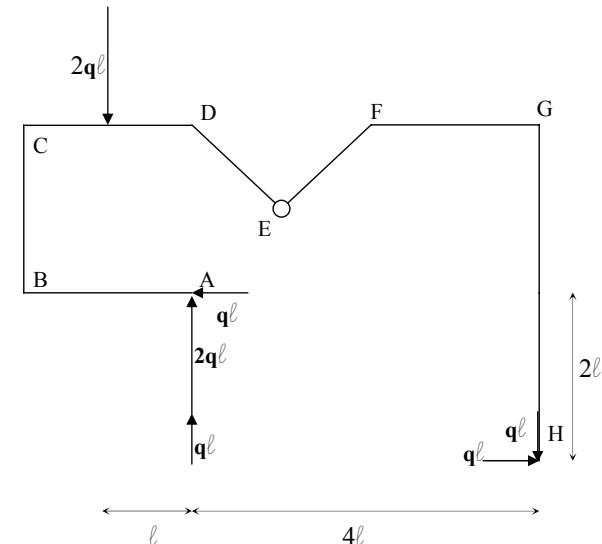


Verifica mediante l'equilibrio globale alla rotazione.

È molto utile eseguire anche l'equilibrio globale alla rotazione della struttura, in verifica finale dei calcoli trascritti nel diagramma di corpo libero.



→ eventualmente, è possibile scomporre forze e reazioni, in modo da ottenere coppie formate da forze di eguale modulo.



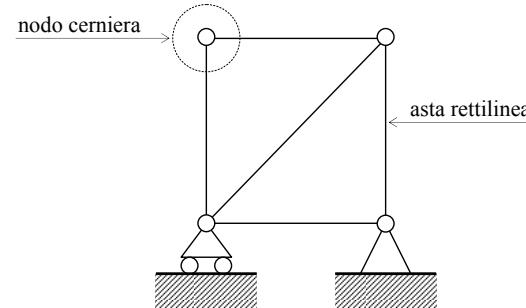
$$\sum M_i = 0$$

$$M - q\ell \cdot 4l + q\ell \cdot 2l + 2q\ell \cdot l = 0 \rightarrow [M = 0] \rightarrow \text{la struttura è in equilibrio alla rotazione.}$$

A.4

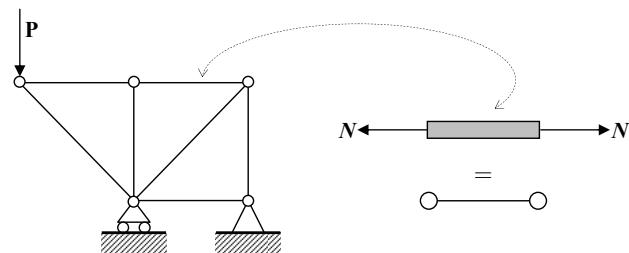
STRUTTURE RETICOLARI

Le strutture reticolari sono strutture *formate da aste rettilinee, connesse agli estremi attraverso nodi cerniera*. Tali strutture possono essere sia spaziali sia piane.
Il punto di incontro di due o più aste nel quale non viene trasmesso momento è chiamato *nodo cerniera*.



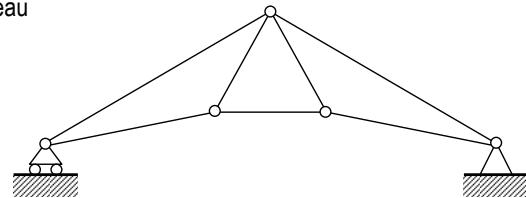
Assunti di calcolo da adottare per *strutture reticolari piane*:

- reticolare con aste interconnesse da cerniere perfette (metodo che non sarà affrontato; la cerniera perfetta equivale ad una cerniera normale in cui $M = 0$, tenendo conto che in casi particolari le cerniere trasmettono momento).
- reticolare con carichi esterni applicati ai nodi cerniera \rightarrow tutte le aste sono soggette solo a sforzo normale, costante lungo tutta la lunghezza dell'asta. \rightarrow le aste possono quindi anche essere dette *bielle*.

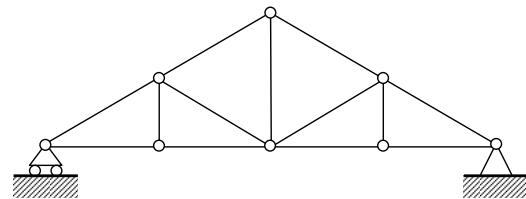


Tipi di strutture reticolari.

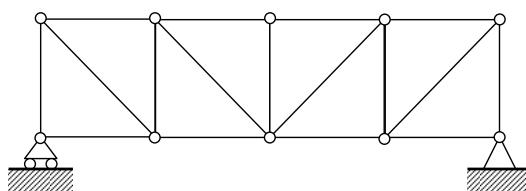
- Reticolare Polonceau



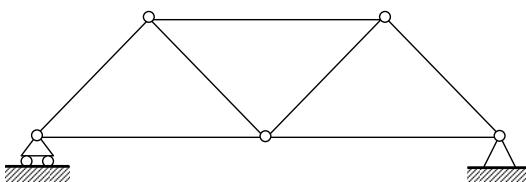
- Reticolare Inglese



- Reticolare Mohniè



- Reticolare Neville

Concetti preliminari per il calcolo.

- individuare le reazioni vincolari esterne
- trovare gli sforzi normali su tutte le aste

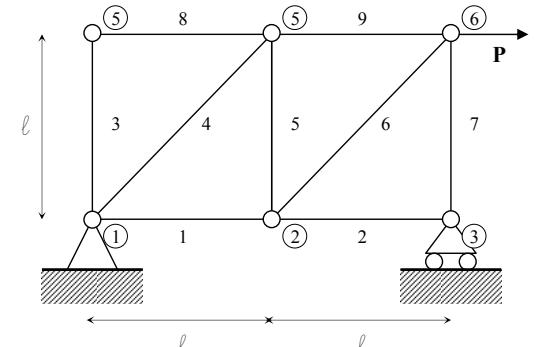
→ si inizia numerando i nodi e le aste (es. nodi con numero arabo cerchiato, aste con numero arabo non cerchiato), e successivamente si conteggiano i gradi di vincolo esterno.

N_N (numero nodi) : 6

N_A (numero aste) : 9

N_V (numero gradi di vincolo) : 3

→ due dalla cerniera, uno dall'appoggio



→ le incognite sono lo sforzo normale N sulle aste e le reazioni vincolari. → ogni nodo fornisce due equazioni di equilibrio; le equazioni complessive sono quindi due volte il numero dei nodi.

equazioni = $2 N_N$

incognite = $N_A + N_V$

una struttura reticolare piana è risolvibile quando:

$$2 N_N = N_A + N_V$$

o meglio, riassumendo in un coefficiente g :

$$g = 2 N_N - N_A - N_V$$

$g > 0 \rightarrow 2 N_N > N_A + N_V \rightarrow$ struttura labile

$g = 0 \rightarrow 2 N_N = N_A + N_V \rightarrow$ struttura isostatica

$g < 0 \rightarrow 2 N_N < N_A + N_V \rightarrow$ struttura iperstatica

quindi, la struttura di partenza

$$N_N = 6 \quad N_A = 9 \quad N_V = 3 \quad \rightarrow 12 = 12, \quad g = 0 \rightarrow \text{è una reticolare isostatica.}$$

Metodo di calcolo dell'equilibrio ai nodi.

- calcolare le reazioni vincolari.
 - scrivere per ogni nodo due equazioni di equilibrio, una alla traslazione orizzontale ed una alla verticale.
 - le incognite delle suddette equazioni sono gli sforzi normali su tutte le aste.
- N.b. è indispensabile non avere più di due incognite per nodo, e gli equilibri fatti agli ultimi due nodi permettono di verificare se i precedenti calcoli sono esatti → delle quattro equazioni che vengono scritte, tre sono di controllo poiché le reazioni sono già note dagli altri calcoli.

-esempio pratico-

- calcolare le reazioni vincolari.

$$\sum H_i = 0$$

$$H = 0$$

$$\sum V_i = 0$$

$$V_{\textcircled{1}} - P - V_{\textcircled{2}} = 0$$

$$\sum M_{\textcircled{1}} = 0$$

$$M - V_{\textcircled{2}} * l + P * l = 0$$

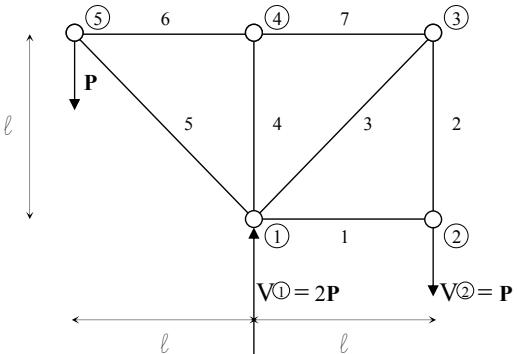
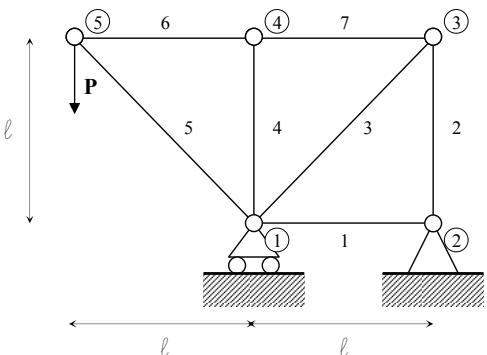
$$\rightarrow V_{\textcircled{2}} = P$$

$$\rightarrow V_{\textcircled{1}} = 2P$$

$$N_N = 6$$

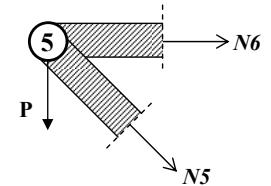
$$N_A = 9$$

$$N_V = 3$$



- per il calcolo si parte da un nodo cerniera che comprende due sole aste, per il quale vanno scritte due sole equazioni. → nell'esempio è possibile partire dal nodo ② o dal nodo ⑤.

Convenzione: se lo sforzo normale N su un'asta è incognito, esso è sempre uscente dal nodo.



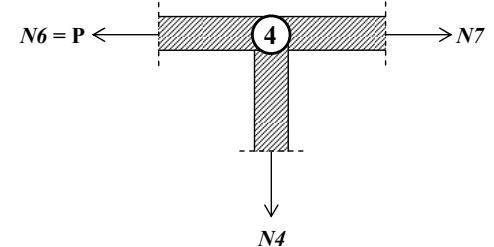
- scrivere le equazioni di equilibrio, una alla traslazione orizzontale una alla verticale.

$$\text{E.O. } \left\{ \begin{array}{l} N_6 + N_5/\sqrt{2} = 0 \rightarrow N_6 = -N_5/\sqrt{2} \rightarrow N_6 = P \\ -P - N_5/\sqrt{2} = 0 \rightarrow N_5 = -P\sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$\text{E.V. } \left\{ \begin{array}{l} -P - N_5/\sqrt{2} = 0 \rightarrow N_5 = -P\sqrt{2} \end{array} \right.$$

- ripetere tale operazione per il resto dei nodi.

Convenzione: se lo sforzo normale su di un'asta è noto e positivo si indica uscente dal nodo, se noto e negativo entrante nel nodo.

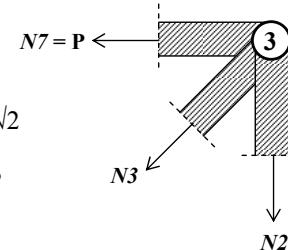


$$\text{E.O. } \left\{ \begin{array}{l} N_7 - P = 0 \rightarrow N_7 = P \end{array} \right.$$

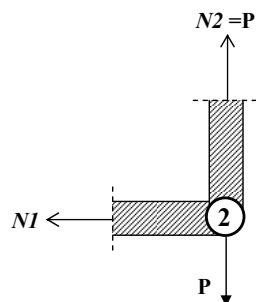
$$\text{E.V. } \left\{ \begin{array}{l} -N_4 = 0 \rightarrow N_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{E.O. } \left\{ \begin{array}{l} -P - N_3/\sqrt{2} = 0 \rightarrow N_3 = -P\sqrt{2} \end{array} \right.$$

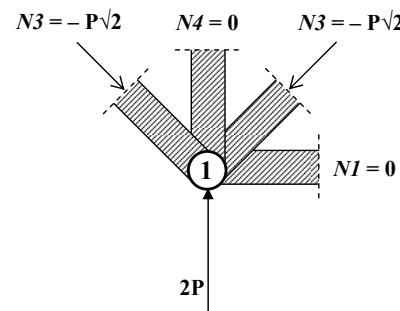
$$\text{E.V. } \left\{ \begin{array}{l} -N_2 - N_3/\sqrt{2} = 0 \rightarrow N_2 = P \end{array} \right.$$



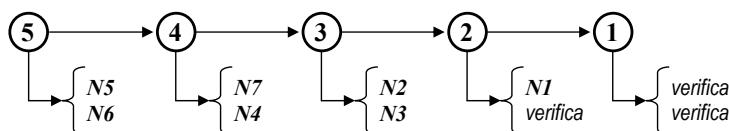
$$\begin{aligned} \text{E.O.} & \left\{ \begin{aligned} -NI &= 0 \rightarrow NI = 0 \\ \text{E.V.} & \left\{ \begin{aligned} -P + N2 &= 0 \rightarrow N2 = P \\ & \text{(prima equazione di verifica)} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$



$$\begin{array}{ll} \text{E.O.} & \left\{ \begin{array}{l} -P + P + NI = 0 \rightarrow NI = 0 \\ \text{(seconda equazione di verifica)} \end{array} \right. \\ \text{E.V.} & \left\{ \begin{array}{l} -P - P + 2P + N4 = 0 \rightarrow N4 = 0 \\ \text{(terza equazione di verifica)} \end{array} \right. \end{array}$$



Riassumendo il percorso eseguito:



e. redigere una tabella riassuntiva dei risultati ottenuti.

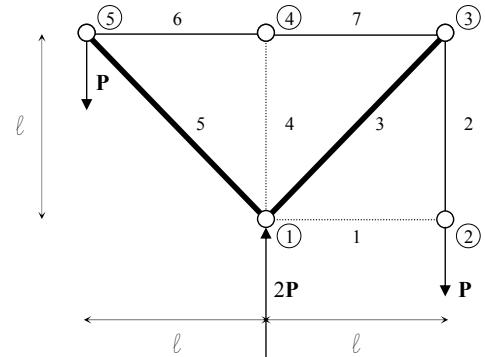
N.b. se un'asta ha sforzo normale positivo è detta *tirante*, se negativo *puntone*, se zero asta *scarica*.

asta	valore N	tipo asta
1	0	scarica
2	P	tirante
3	$-P\sqrt{2}$	puntone
4	0	scarica
5	$-P\sqrt{2}$	puntone
6	P	tirante
7	P	tirante

STATICHE DELLA TRAVE

f. come ultima operazione, segnalare i risultati ottenuti nella struttura di partenza.

- puntone
- tirante
- asta scarica

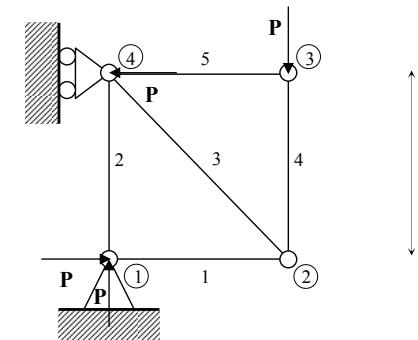


Metodo di calcolo delle sezioni di Ritter.

Tale metodo permette di calcolare gli sforzi normali in una struttura reticolare note le reazioni vincolari. Si basa sul teorema fondamentale della statica secondo il quale "se una struttura è in equilibrio lo è ogni sua parte".

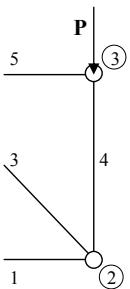
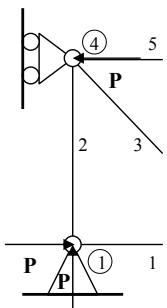
Chiamasi *sezione di Ritter "canonica"* una sezione che divide in due parti una struttura reticolare, tagliando tre aste non tutte concorrenti nello stesso punto.

-esempio pratico-

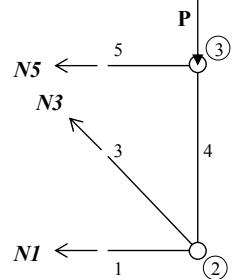
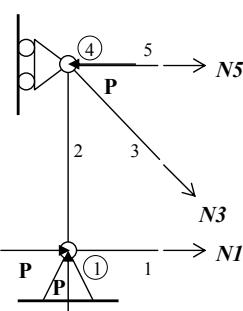


a. dividere la struttura in due o più tronconi.

N.b. la sezione deve tagliare né più né meno tre aste, non concorrenti in uno stesso nodo.



b. mettere in evidenza le forze interne e gli sforzi normali incogniti lungo le aste.



c. la struttura è in equilibrio in ogni suo punto, quindi è possibile redigere le equazioni di equilibrio. Viene utilizzata l'equazione di equilibrio alla rotazione, scegliendo per iniziare un nodo che lasci nell'equazione una sola incognita.

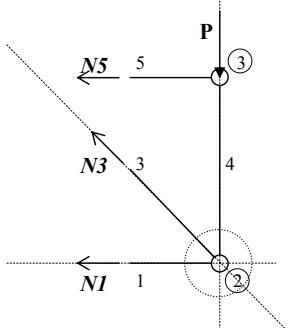
→ nel nodo ② NI, N3, P hanno contributo nullo nel calcolo del momento; l'unica incognita è N5.

? = N5

$$\Sigma M_{\odot} \text{ parte Dx} = 0$$

$$M + N5 * \ell = 0$$

$$\rightarrow N5 = 0$$



d. proseguire per gli altri sforzi normali incogniti, cambiando di volta in volta nodo.

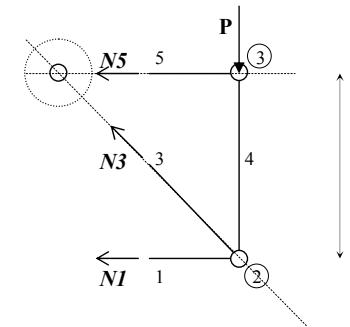
N.b. si prende in considerazione un nodo trovato all'intersezione delle rette d'azione di N3 ed N5, coincidente con il nodo ④.

$$? = NI$$

$$\Sigma M_{\odot} \text{ parte Dx} = 0$$

$$M - NI * \ell - P * \ell = 0$$

$$\rightarrow NI = -P$$



→ nel caso degenere in cui le rette d'azione degli sforzi normali siano parallele (calcolo di N3), si sostituisce l'equazione di equilibrio alla rotazione con una di equilibrio alla traslazione, nella direzione perpendicolare alle due rette parallele.

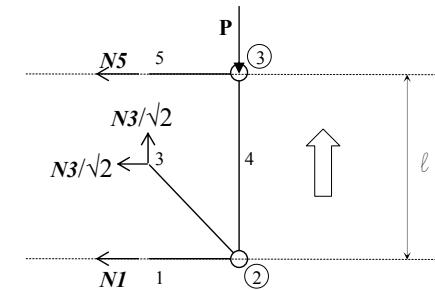
si considera in questo caso solo una componente di N3, quella verticale che rientra nel calcolo.

$$? = N3$$

$$\Sigma V_{\odot} \text{ parte Dx} = 0$$

$$M + N3 * \sqrt{2} - P = 0$$

$$\rightarrow N3 = P * \sqrt{2}$$



→ N.b. il metodo delle sezioni di Ritter non permette di conoscere tutti gli sforzi normali di una reticolare → per gli sforzi restanti bisogna ricorrere a sezioni non canoniche o al metodo dell'equilibrio ai nodi.

LA TRAVE ELASTICA

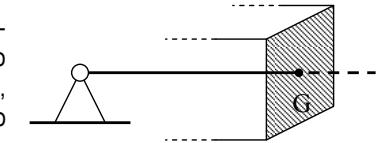


B.1

TRAVE INFLESSA

La deformabilità di una struttura dipende dai materiali di cui è composta e dai parametri geometrici in gioco.

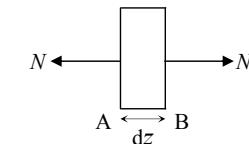
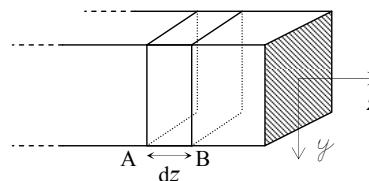
Tema di studio è *l'oggetto trave*, oggetto con una dimensione preponderante rispetto alle due restanti. Il modello trave viene identificato come *elemento monodimensionale*, rappresentato dall'asse longitudinale della stessa (luogo geometrico dei baricentri delle sezioni).



Nello stesso modo sono state affrontate le caratteristiche di sollecitazione interna (vedi p.18) → le sezioni trasmettono fra loro le azioni di taglio, momento, sforzo normale. In questo capitolo si studieranno le *deformazioni* indotte da tali sollecitazioni.

Deformazione longitudinale.

Prendendo un concio di ampiezza dz

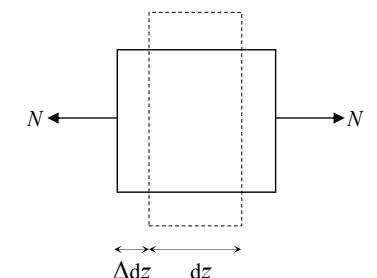


il medesimo reagisce allo *sforzo normale* applicato, allungandosi di Δdz .

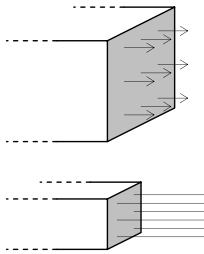
Δdz sarà:

- proporzionale allo sforzo normale N
- inversamente proporzionale all'area della sezione A
- dipendente dalla lunghezza dz considerata
- dipendente dal materiale di cui è composta la struttura → modulo elastico E

$$\Delta dz = \frac{Ndz}{EA} \rightarrow \text{deformazione assiale.}$$

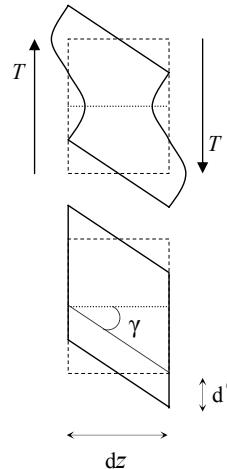


EA = *rigidezza assiale*, che ha in sé una caratteristica meccanica (E) ed una geometrica (A).



Nello sforzo normale Δdz è inversamente proporzionale all'area della sezione perché:

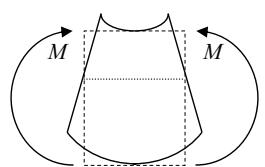
se la sezione è grande, le sollecitazioni si distribuiscono in piccole forze su tutta la sezione; discorso analogo se la sezione è piccola, ma le forze hanno minore spazio in cui distribuirsi e quindi la sollecitazione è maggiore → diviene fondamentale conoscere la sezione dell'oggetto.



Deformazione a taglio.

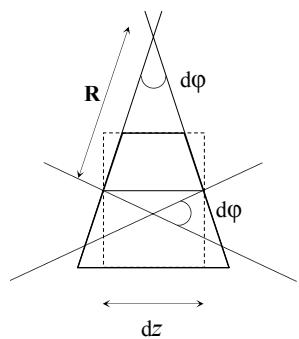
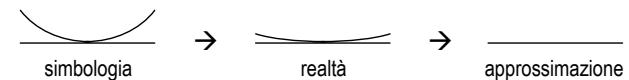
Nel *taglio* il concio si deforma nel modo illustrato a fianco, ovvero le sezioni scorrono reciprocamente e si ingobbano.

Per semplicità, la vera deformazione viene approssimata, lasciando le sezioni lisce. In ogni caso, la deformazione tagliente sarà per ora trascurata, poiché viene adottato per lo studio il *modello di trave di Euler*, che trascura tale deformazione (la quale in realtà è estremamente piccola nel caso di travi sottili).



Deformazione flessionale.

Nel *momento flettente* le fibre superiori del concio si comprimono e le inferiori si tendono, secondo un arco di circonferenza. Ma gli spostamenti sono abbastanza piccoli da poter approssimare, confondendo l'arco di circonferenza con la sua tangente.



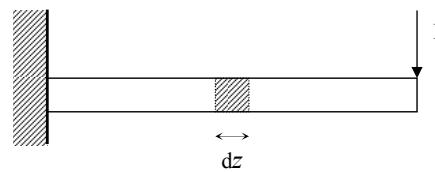
I due assi su cui giacciono le due sezioni del concio si incontrano in un punto, formando l'angolo $d\phi$ ed un raggio di curvatura R .

Si nota che nella definizione di rigidezza vista poc' anzi l'area non è sufficiente, poiché la sezione resiste in modo diverso per posizione → viene inserito nella formula il *momento di inerzia*.

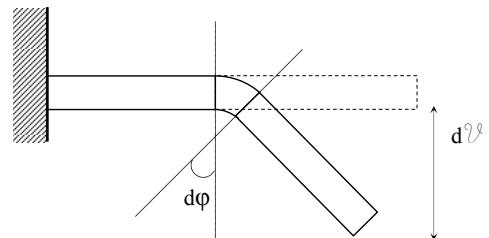
→ $EI = \text{rigidezza flessionale}$.

Modello di Euler-Bernouilli e Timoshenko.

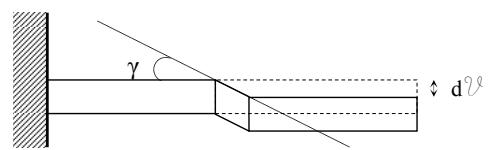
Si prenda ad esempio una trave incastrata con una forza P applicata sull'estremo libero, ipotizzando che un solo concio della struttura sia deformabile.



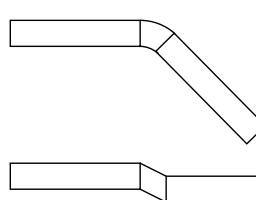
Alla sollecitazione momento flettente M si otterrà un effetto di questo tipo.



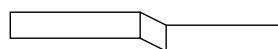
Il taglio T è di minore entità, ha sempre incisività minore → è possibile trascurare le deformazioni date dal taglio.



→ più la trave è sottile, più la deformazione tagliente T è trascurabile rispetto alla flessione M .

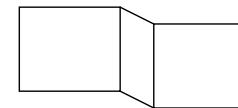
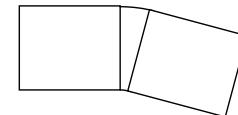


M



T

travi sottili



travi tozze

Sono le travi che verranno analizzate in questa sede, e seguono il *modello di Euler-Bernouilli*, caratterizzato da:

- mantenimento delle sezioni;
- spostamenti piccoli;
- trascurabilità delle azioni taglienti.

Gli effetti di deformazione a taglio e flessionale sono comparabili; tali travi individuano il *modello di Timoshenko*.

B.2

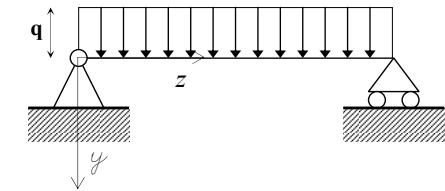
SPOSTAMENTI, ROTAZIONI, CURVATURE

LA TRAVE ELASTICA

Per disegnare la deformata flessionale di una struttura, è necessario conoscere innanzitutto le condizioni di cinematica nei vincoli.

cerniera	
u	$= 0$
v	$= 0$
φ	$\neq 0$

appoggio	
u	$\neq 0$
v	$= 0$
φ	$\neq 0$

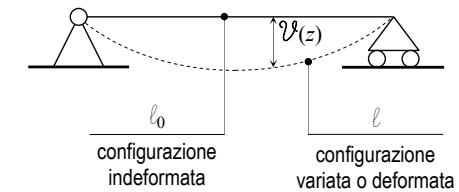


Nella *deformata reale* il carrello resiste solamente agli spostamenti verticali, e quindi pattina.

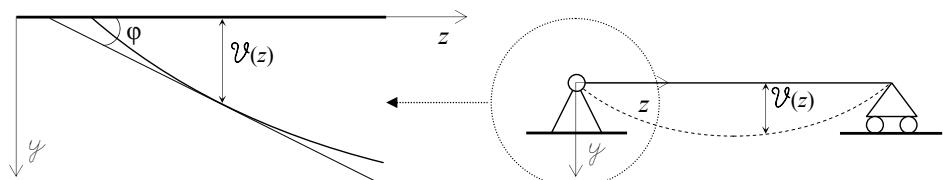
Nella pratica si prende in considerazione un'approssimazione, secondo la *teoria dei piccoli spostamenti* → l'appoggio si sposta talmente di poco da essere lasciato dov'è, ovvero si considera $l \approx l_0$.



\mathcal{V} di (z) è detto *linea elastica*, e rappresenta la configurazione deformata per effetto della flessione della trave.



Relazione fra momento flettente e deformata flessionale.



Ingrandendo un pezzo di deformata, tracciare la tangente alla curva trovando l'angolo φ , angolo secondo il quale l'oggetto si deforma.
 → N.b. la tangente di una curva in un punto è la derivata della curva in quel punto.

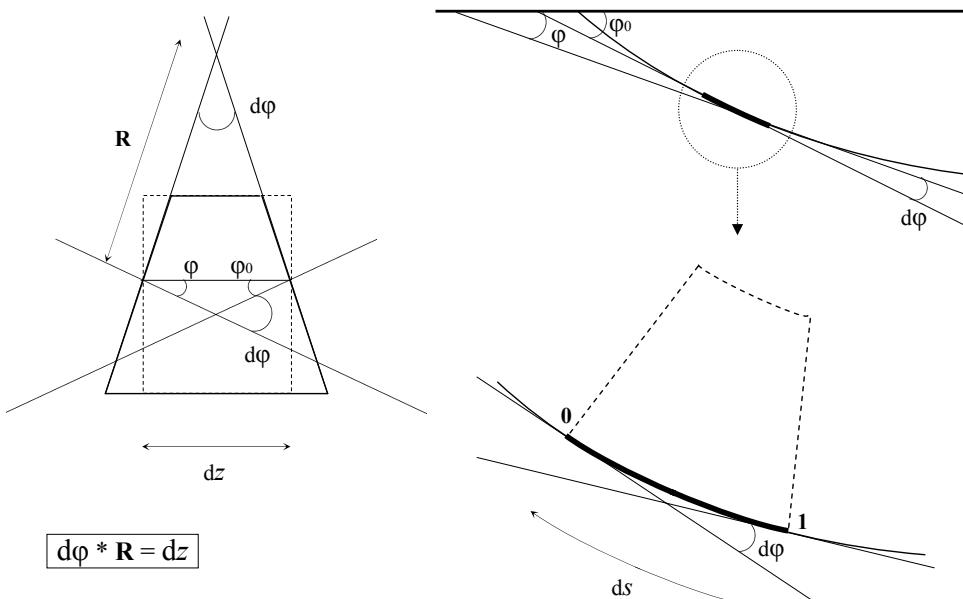
Se l'angolo è piccolo, la tangente dell'angolo è confondibile con l'angolo stesso.

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi \approx \frac{d\varphi}{dz}$$

Convenzione: spostamenti positivi generano rotazioni orarie \rightarrow fra **M** e φ si pone il segno -.

$$+M \curvearrowleft - (+\varphi)$$

L'angolo $d\varphi$ formato dall'intersezione fra le tangenti è la *rotazione relativa* fra il punto **0** ed il punto **1**.

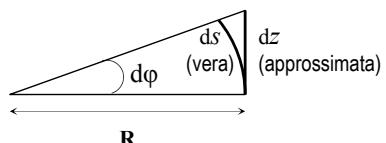


$$d\varphi * R = dz$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{R}$$

$d\varphi$ dipende da:

- l'entità del momento flettente **M**
- l'inerzia del momento **I**
- il modulo elastico del materiale **E**



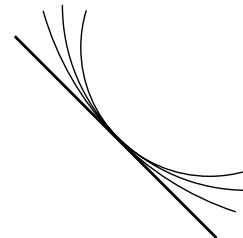
Riassumendo:

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\varphi \rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{R} = -\frac{M}{EI}$$

momento applicato
rigidezza flessionale

N.b. da $-\varphi$ a $1/R$ si ha a che fare con passaggi ed equazioni cinematiche (compatibilità e congruenza con i vincoli), mentre da $1/R$ a $-M/EI$ si passa dal mondo della cinematica a quello della statica.

- \rightarrow la tangente che si considera è ovviamente tangente per una famiglia di curve, e non per un'unica curva.
- \rightarrow scendendo di grado mediante derivazione, la tangente in un punto è una ed una sola.



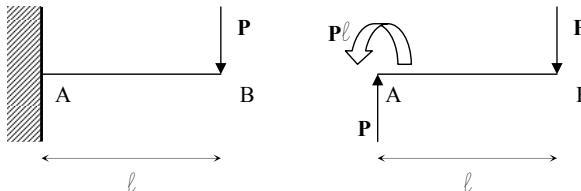
Richiamo agli integrali.

$$\int_b^a kz^n dz = \frac{kz^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b$$

\rightarrow formula generale di integrale definito. Per il calcolo sono utili gli integrali indefiniti, per i quali basta aggiungere alla suddetta formula una costante **C**, che verrà ricavata dalla struttura di partenza.

$$\int kz^n dz = \frac{kz^{n+1}}{n+1} + C$$

\rightarrow formula generale di integrale indefinito.

Metodo dell'integrazione della linea elastica.

$$\sum H_i = 0 \rightarrow H = 0$$

$$\sum V_i = 0 \rightarrow V - P = 0 \rightarrow V = P$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M - P \cdot l = 0 \rightarrow M = P \cdot l$$

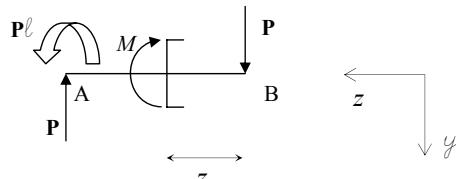
? = calcolare l'abbassamento in B.

N.b. partendo da destra la z positiva va da destra a sinistra.

$$M_z = -P \cdot z$$

a. cambiare di segno il momento

$$EI * d^2\mathcal{V}/dz^2 = dz$$



b. integrare l'espressione precedente

$$EI * d\mathcal{V}/dz = Pz^2/2 + C_1$$

c. integrare nuovamente

$$EI * \mathcal{V} = Pz^3/6 + C_1z + C_2$$

→ si ottengono due costanti. Bisogna quindi porre una condizione cinematica che definisca la famiglia di curve utile.

N.b. se il momento è lineare, la rotazione φ e la linea elastica \mathcal{V} saranno curve.

$$\text{per } z = l \rightarrow \mathcal{V} = 0$$

$$\text{per } z = l \rightarrow d\mathcal{V}/dz = 0$$

→ la cinematica enuncia che in A rotazione e spostamento sono nulli, quindi è possibile eguagliare l'espressione a zero.

$$- EI \mathcal{V}_{(z=l)} = Pl^3/6 + C_1l + C_2 = 0$$

$$- EI d\mathcal{V}/dz_{(z=l)} = Pl^2/2 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -Pl^2/2$$

$$- EI \mathcal{V}_{(z=0)} = Pl^3/6 - (Pl^2/2)*l + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = Pl^3/2 - Pl^3/6 \rightarrow C_2 = Pl^3/3$$

Sostituendo il tutto:

$$EI * d\mathcal{V}/dz = Pz^2/2 - Pl^2/2$$

$$EI * \mathcal{V} = Pz^3/6 - Pl^2/2 * z + Pl^3/3$$

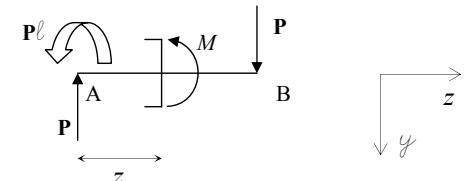
$$EI \mathcal{V}_{(z=0)} = Pl^3/3 \rightarrow \mathcal{V} = Pl^3/3EI$$

Partendo da A, il discorso è il medesimo.

$$M_z = P * z - Pl$$

$$\text{per } z = 0 \rightarrow M = -Pl$$

$$\text{per } z = l \rightarrow M = 0$$



$$EI * d^2\mathcal{V}/dz^2 = Pl - Pz$$

$$EI * d\mathcal{V}/dz = Plz - Pz^2/2 + C_1$$

$$EI * \mathcal{V} = Plz^2/2 - Pz^3/6 + C_1z + C_2$$

$$\text{per } z = 0 \rightarrow \mathcal{V} = 0$$

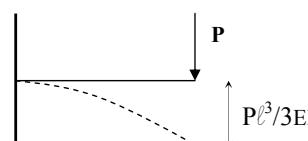
$$\text{per } z = 0 \rightarrow d\mathcal{V}/dz = 0$$

$$EI \mathcal{V}_{(z=0)} = C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$EI \mathcal{V}_{(z=l)} = Pl^3/2 - Pl^3/6 = Pl^3/3$$

$$\mathcal{V} = Pl^3/3EI$$

È ora possibile disegnare la deformata della struttura.



Metodo dell'analogia formale di Mohr. \mathcal{V}_Z = linea elastica o abbassamento. M_Z = momento flettente. $\mathcal{V}'_Z = \varphi_Z$ = rotazione. $M'_Z = T_Z$ = taglio. $\mathcal{V}''_Z = \varphi'_Z = 1/R$ = curvatura. $M''_Z = T'_Z = -q$ = carico. $1/R = -M/EI \rightarrow$ relazione sostitutiva che lega cinematica e statica.

E' evidente che le *relazioni statiche* fra momento, taglio e carico sono in qualche modo *formalmente analoghe* alle *relazioni cinematiche* fra abbassamento, rotazione e curvatura. Mohr individuò appunto questa analogia, disinteressandosi del fatto che da una parte si trovano elementi statici (M , T e q) e dall'altra cinematici (\mathcal{V} , φ e $1/R$).

Cinematica e statica vengono quindi raffrontate ipotizzando un *mondo fittizio*, indicato con l'asterisco (*).

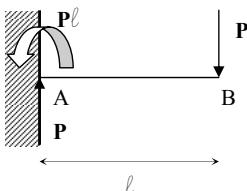
$$q^{(*)} \text{ (carico fittizio)} = 1/R = -M/EI$$

$$T^{(*)} \text{ (taglio fittizio)} = \varphi$$

$$M^{(*)} \text{ (momento fittizio)} = \mathcal{V}$$

a. trovare la rotazione reale equivale a trovare il taglio fittizio della trave \rightarrow la trave viene caricata con il diagramma delle curvature.

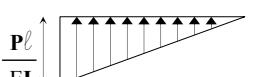
sistema Reale (sR)



b. è necessario il momento flettente nei suoi valori ed andamento grafico.

N.b. $q^{(*)}$ è il momento cambiato di segno e diviso per $EI \rightarrow$ si prende il diagramma di momento invertito di segno, e quindi rovesciato.

$$q^{(*)} = -M/EI = -P\ell/EI$$



c. scrivere le condizioni cinematiche nei vincoli del sistema reale.

$$A_{(\text{incastro})}: \mathcal{V}_A = 0; \varphi_A = 0$$

$$B_{(\text{estremo libero})}: \mathcal{V}_B \neq 0; \varphi_B \neq 0$$

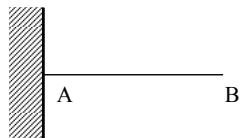
d. nel sistema fittizio bisogna porre dei vincoli analoghi che garantiscono:

$$A: M^{(*)}_A = 0; T^{(*)}_A = 0 \rightarrow \text{estremo libero}$$

$$B: M^{(*)}_B \neq 0; T^{(*)}_B \neq 0 \rightarrow \text{incastro}$$

sistema Reale (sR)

$$\begin{aligned} A & \text{---} & B \\ \mathcal{V}_A = 0 & & \mathcal{V}_B \neq 0 \\ \varphi_A = 0 & & \varphi_B \neq 0 \end{aligned}$$

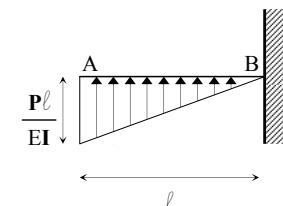


sistema Fittizio (sF)

$$\begin{aligned} A & \text{---} & B \\ M^{(*)}_A = 0 & & M^{(*)}_B \neq 0 \\ T^{(*)}_A = 0 & & T^{(*)}_B \neq 0 \end{aligned}$$



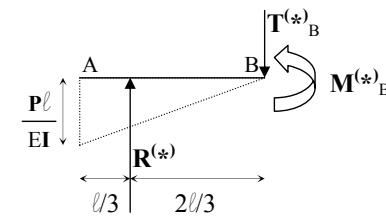
e. applicare il carico fittizio nel sistema fittizio.

f. calcolare taglio fittizio $T^{(*)}$ e momento fittizio $M^{(*)}$ del sistema fittizio.

$$R^{(*)} = -P\ell/EI * \ell * 1/2 = -P\ell^2/2EI$$

$$T^{(*)}_B - P\ell^2/2EI = 0 \rightarrow T^{(*)}_B = P\ell^2/2EI = \varphi_B$$

$$M^{(*)}_B - P\ell^2/2EI * 2\ell/3 = 0 \rightarrow M^{(*)}_B = P\ell^3/3EI = \mathcal{V}_B$$



LA TRAVE ELASTICA

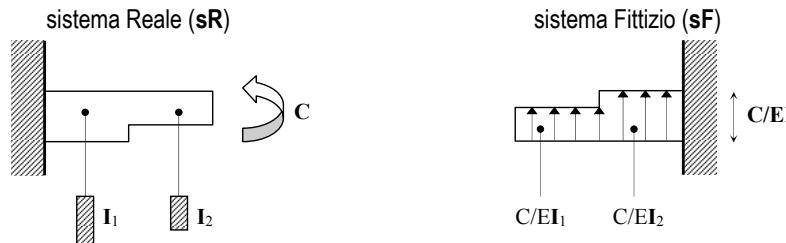
g. Studiando le caratteristiche di sollecitazione della struttura fittizia, si ottengono le formule generali per risolvere tutta la struttura (vedi p.48, esempio pratico di integrazione della linea elastica).

$$\begin{aligned}
 1/R \rightarrow R^{(*)}_z &= -Pz/EI * z * 1/2 = -Pz^2/2EI \\
 \varphi_z \rightarrow T^{(*)}_z &= P\ell^2/2EI - Pz^2/2EI \\
 \mathcal{V}_z \rightarrow M^{(*)}_z &= Pz^2/2EI * z/3 - P\ell^2/2EI * z + P\ell^3/3EI
 \end{aligned}$$

Riassumendo:

- calcolare il momento flettente nella struttura di partenza, e disegnarne il diagramma;
- scrivere le condizioni reali degli spostamenti nei vincoli;
- porre nel sistema fittizio dei vincoli che soddisfino, con analogia a tagli e momenti fittizi, le condizioni cinematiche del sistema reale;
- caricare il sistema fittizio con il diagramma del momento invertito di segno e diviso per EI , ottenendo il diagramma delle curvature;
- calcolare momenti e tagli fittizi nel sistema fittizio, dove sia necessario, ottenendo spostamenti e rotazioni del sistema reale.

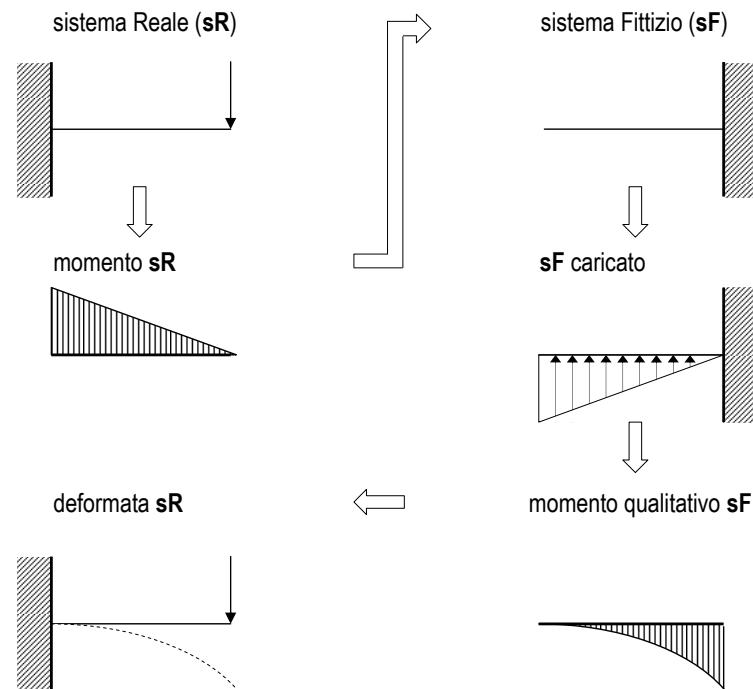
N.b. in ogni caso nella realtà *il diagramma delle curvature non corrisponde al diagramma del momento flettente, poiché bisogna tener conto della rigidezza flessionale*:



$$C \uparrow \boxed{\text{Diagram of } M(\text{sR})} \quad M(\text{sR})$$

→ Il diagramma di momento flettente non cambia, ma non bisogna dimenticare che il sistema fittizio tiene conto anche della rigidezza flessionale EI → se il rapporto EI è piccolo il diagramma si ingrandirà, e viceversa; stesse considerazioni vanno poste se la trave è costituita da due materiali diversi, con E_1 ed E_2 .

N.b. la linea del diagramma di momento del sistema fittizio, trasportata senza cambi di segno nel sistema reale, è la deformata qualitativa di quest'ultimo.



SPOSTAMENTI, ROTAZIONI, CURVATURE

Esercizio n.18

? = rotazione in A e B.

$$\begin{aligned}\sum V_i &= 0 \rightarrow V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = V_B \\ \sum M_A &= 0 \rightarrow M - C + V_B \cdot \ell = 0 \\ \rightarrow [V_A = V_B = C/\ell]\end{aligned}$$

seziona 01

$$0 \leq x \leq \ell$$

$$\overset{\curvearrowleft}{M}_0 \rightarrow M + C/\ell \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell \rightarrow [M = -C]$$

cinematica sR

$$A(\text{cerniera}): \dot{\vartheta}_A = 0; \varphi_A \neq 0$$

$$B(\text{appoggio}): \dot{\vartheta}_B = 0; \varphi_B \neq 0$$

vincoli sF

$$A: \mathbf{M}^{(*)}_A = 0; \mathbf{T}^{(*)}_A \neq 0 \rightarrow \text{appoggio}$$

$$B: \mathbf{M}^{(*)}_B = 0; \mathbf{T}^{(*)}_B \neq 0 \rightarrow \text{cerniera}$$

N.b. il sistema fittizio è identico al reale.

$$\mathbf{q}^{(*)} = -C/EI$$

$$\mathbf{R}^{(*)} = -C/EI \cdot \ell \cdot 1/2 = -C\ell/2EI$$

$$\sum V_i (\mathbf{sF}) = 0$$

$$\mathbf{T}^{(*)}_A + \mathbf{T}^{(*)}_B - C\ell/2EI = 0$$

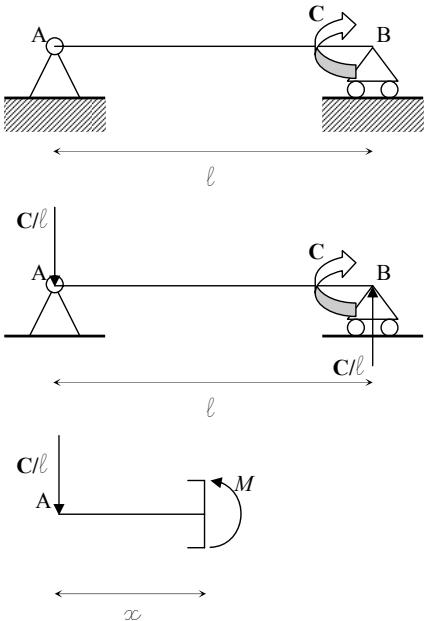
$$\sum M_A (\mathbf{sF}) = 0$$

$$\mathbf{M}^{(*)}_A + C\ell/2EI \cdot 2\ell/3 - \mathbf{T}^{(*)}_B \cdot \ell = 0$$

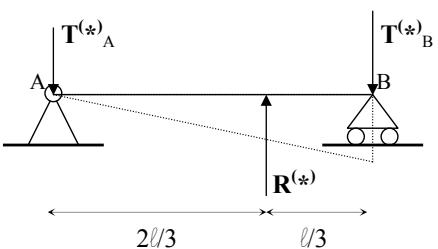
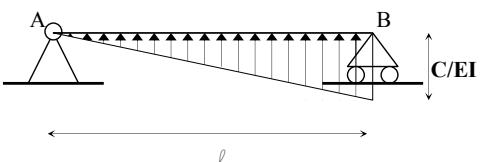
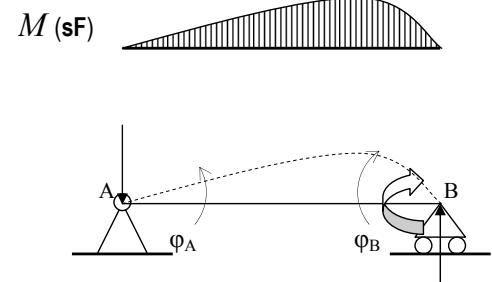
$$\rightarrow \mathbf{M}^{(*)}_A = \mathbf{T}^{(*)}_B \ell - C\ell^2/3EI$$

$$\rightarrow \mathbf{T}^{(*)}_B = C\ell/3EI = \varphi_B$$

$$\rightarrow \mathbf{T}^{(*)}_A = C\ell/6EI = \varphi_A$$



N.b. disegnando la deformata qualitativa a monte dell'esercizio è possibile comprendere anche il verso delle rotazioni. →



Esercizio n.19

? = rotazione in A e B.

N.b. il sistema è caricato simmetricamente
→ è possibile studiare la struttura caricata
con una sola forza e sovrapporre gli effetti.

Disegnare nel sistema reale la deformata
qualitativa è utile per intuire verso e segno
delle rotazioni o degli abbassamenti richiesti. →

$$\sum V_i = 0 \rightarrow V_A + V_B - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M - P \cdot \ell/3 + V_B \cdot \ell = 0$$

$$\rightarrow [V_B = P/3]$$

$$\rightarrow [V_A = 2P/3]$$

seziona 01

$$0 \leq x \leq \ell/3$$

$$M_o \rightarrow M - 2P/3 \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell/3 \rightarrow [M = 2P\ell/9]$$

cinematica sR

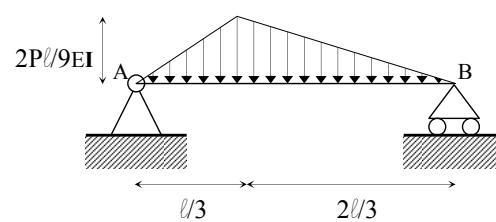
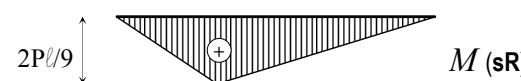
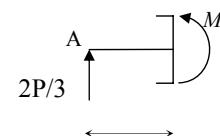
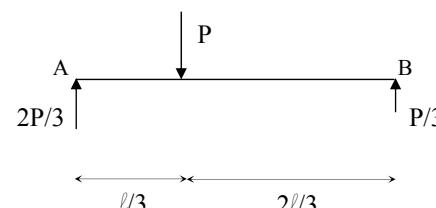
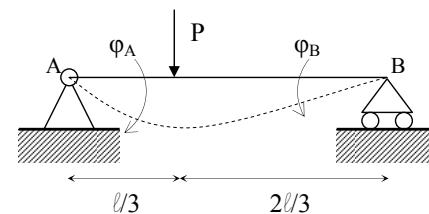
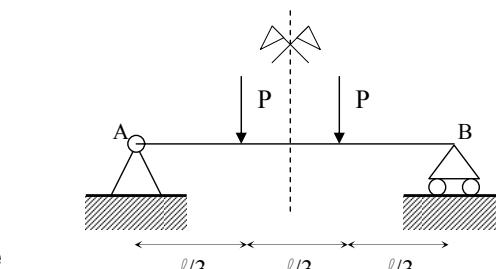
$$A_{(\text{cerniera})}: \vartheta_A = 0; \varphi_A \neq 0$$

$$B_{(\text{appoggio})}: \vartheta_B = 0; \varphi_B \neq 0$$

vincoli sF

$$A: M^{(*)}_A = 0; T^{(*)}_A \neq 0 \rightarrow \text{appoggio}$$

$$B: M^{(*)}_B = 0; T^{(*)}_B \neq 0 \rightarrow \text{cerniera}$$



LA TRAVE ELASTICA

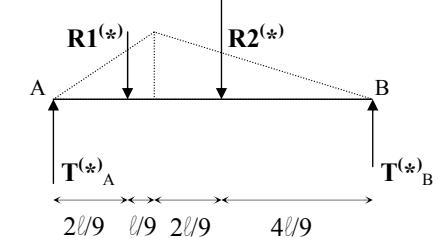
$$q^{(*)} = -2P\ell/9EI$$

$$R1^{(*)} = -2P\ell/9EI \cdot \ell/3 \cdot 1/2 = -P\ell^2/27EI$$

$$R2^{(*)} = -2P\ell/9EI \cdot 2\ell/3 \cdot 1/2 = -2P\ell^2/27EI$$

$$\sum Vi (sF) = 0$$

$$T^{(*)}_A + T^{(*)}_B - P\ell^2/27EI - 2P\ell^2/27EI = 0$$



$$\sum MA (sF) = 0$$

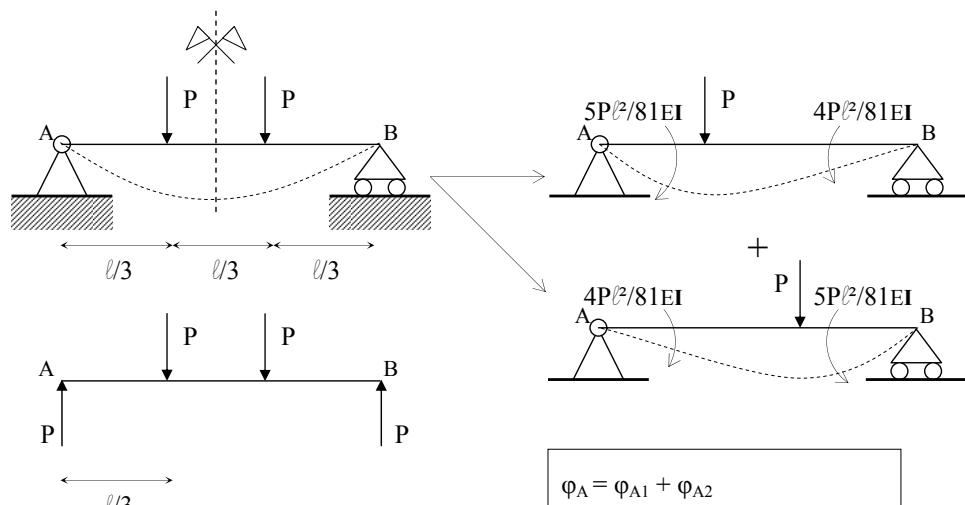
$$M^{(*)}_A - P\ell^2/27EI \cdot 2\ell/9 - 2P\ell^2/27EI \cdot 5\ell/9 + T^{(*)}_B \cdot \ell = 0$$

$$\rightarrow M^{(*)}_A = 2P\ell^3/243EI + 10P\ell^3/243EI - T^{(*)}_B \ell$$

$$\rightarrow T^{(*)}_B = 4P\ell^2/81EI = \varphi_B$$

$$\rightarrow T^{(*)}_A = P\ell^2/9EI - 4P\ell^2/81EI = 0 \rightarrow T^{(*)}_A = 5P\ell^2/81EI = \varphi_A$$

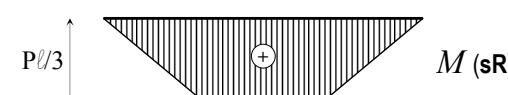
È ora possibile applicare la sovrapposizione degli effetti:



$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2}$$

$$\rightarrow \varphi_A = 5P\ell^2/81EI + 4P\ell^2/81EI$$

$$\rightarrow \varphi_A = P\ell^2/9EI = \varphi_B$$



SPOSTAMENTI, ROTAZIONI, CURVATURE

Esercizio n.20

? = rotazione in A e B, abbassamento in $\ell/2$.

$$\sum V_i = 0$$

$$V_A + V_B - q\ell = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M - q\ell^* \ell/2 + V_B * \ell = 0$$

$$\rightarrow [V_B = q\ell/2] \rightarrow [V_A = q\ell/2], M_{\ell/2} = q\ell^2/8$$

cinematica sR

$$A(\text{cerniera}): \vartheta_A = 0; \varphi_A \neq 0$$

$$B(\text{appoggio}): \vartheta_B = 0; \varphi_B \neq 0$$

vincoli sF

$$A: M^{(*)}_A = 0; T^{(*)}_A \neq 0 \rightarrow \text{appoggio}$$

$$B: M^{(*)}_B = 0; T^{(*)}_B \neq 0 \rightarrow \text{cerniera}$$

$$q^{(*)} = -q\ell^2/8EI$$

$$R1^{(*)} = R2^{(*)} = -q\ell^2/8EI * \ell/2 * 2/3$$

$$\rightarrow -q\ell^2/24EI$$

$$\sum V_i (\text{sF}) = 0$$

$$T^{(*)}_A + T^{(*)}_B - q\ell^2/24EI - q\ell^2/24EI = 0$$

$$\sum M_A (\text{sF}) = 0$$

$$M^{(*)}_A - q\ell^2/24EI * 5\ell/16 - q\ell^2/24EI * 11\ell/16 + T^{(*)}_B * \ell = 0$$

$$\rightarrow M^{(*)}_A = 5q^3/384EI + 11q^3/384EI - T^{(*)}_B \ell$$

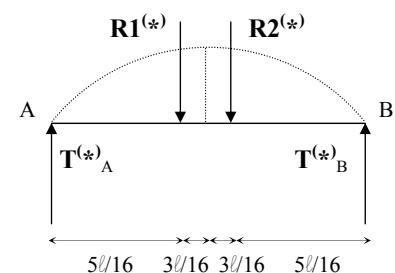
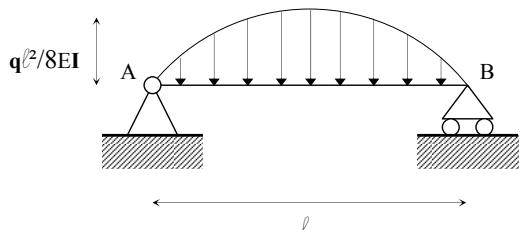
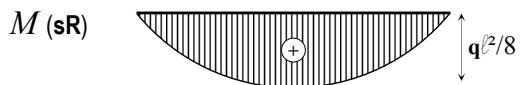
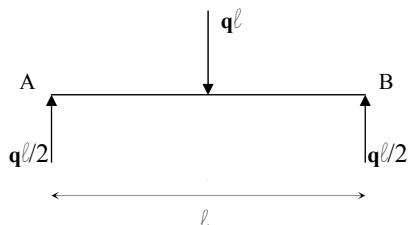
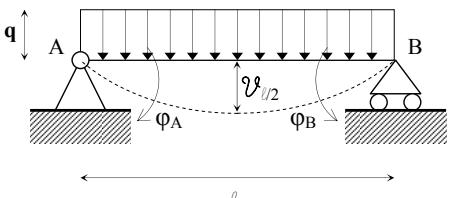
$$\rightarrow [T^{(*)}_B = q^3/24EI = \varphi_B]$$

$$\rightarrow [T^{(*)}_A = q^3/24EI = \varphi_A]$$

$$M^{(*)}_{\ell/2} - q^3/24EI * \ell/2 + q^3/24EI * 3\ell/16 = 0$$

$$M^{(*)}_{\ell/2} = q^3/48EI - 3q^3/384EI$$

$$\rightarrow [M^{(*)}_{\ell/2} = 5q^3/384EI = \vartheta_{\ell/2}]$$



Esercizio n.21

? = rotazione in A e B.

$$\sum V_i = 0 \rightarrow V_A + V_B - q\ell/3 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M - q\ell/3 * \ell/2 + V_B * \ell = 0$$

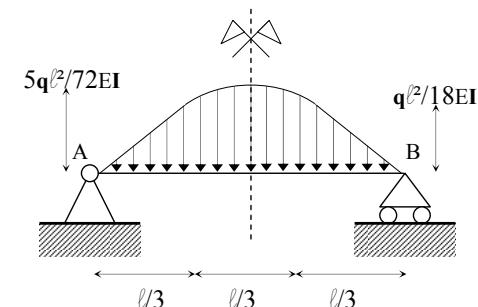
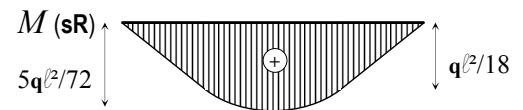
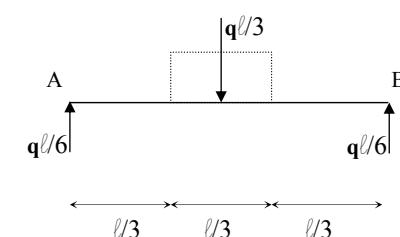
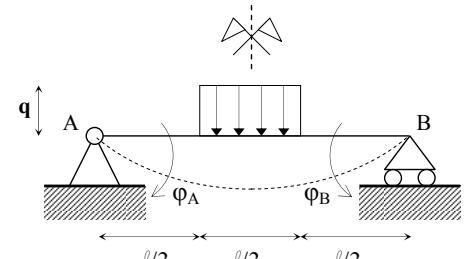
$$\rightarrow [V_B = q\ell/6]$$

$$\rightarrow [V_A = q\ell/6]$$

$$M_{\ell/2} - q\ell/6 * \ell/2 + q\ell/6 * \ell/12 = 0$$

$$\rightarrow M_{\ell/2} = 5q\ell^2/72$$

$$M_{\ell/3} = q\ell^2/18$$



$$q^{(*)} = -q\ell^2/12EI$$

$$R1^{(*)} = -q\ell^2/18EI * \ell/3 * 1/2 = -q^3/108EI$$

$$R2^{(*)} = -q\ell^2/18EI * \ell/6 = -q^3/108EI$$

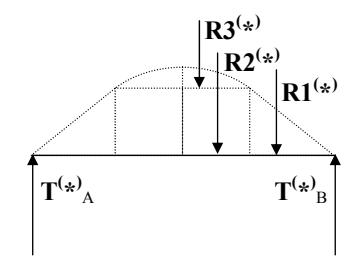
$$R3^{(*)} = -q\ell^2/72EI * \ell/9 = -q^3/648EI$$

$$T^{(*)}_A = T^{(*)}_B = R1^{(*)} + R2^{(*)} + R3^{(*)}$$

$$\rightarrow T^{(*)}_A = q^3/108EI + q^3/108EI + q^3/648EI$$

$$\rightarrow [T^{(*)}_A = 13q^3/648EI = \varphi_A]$$

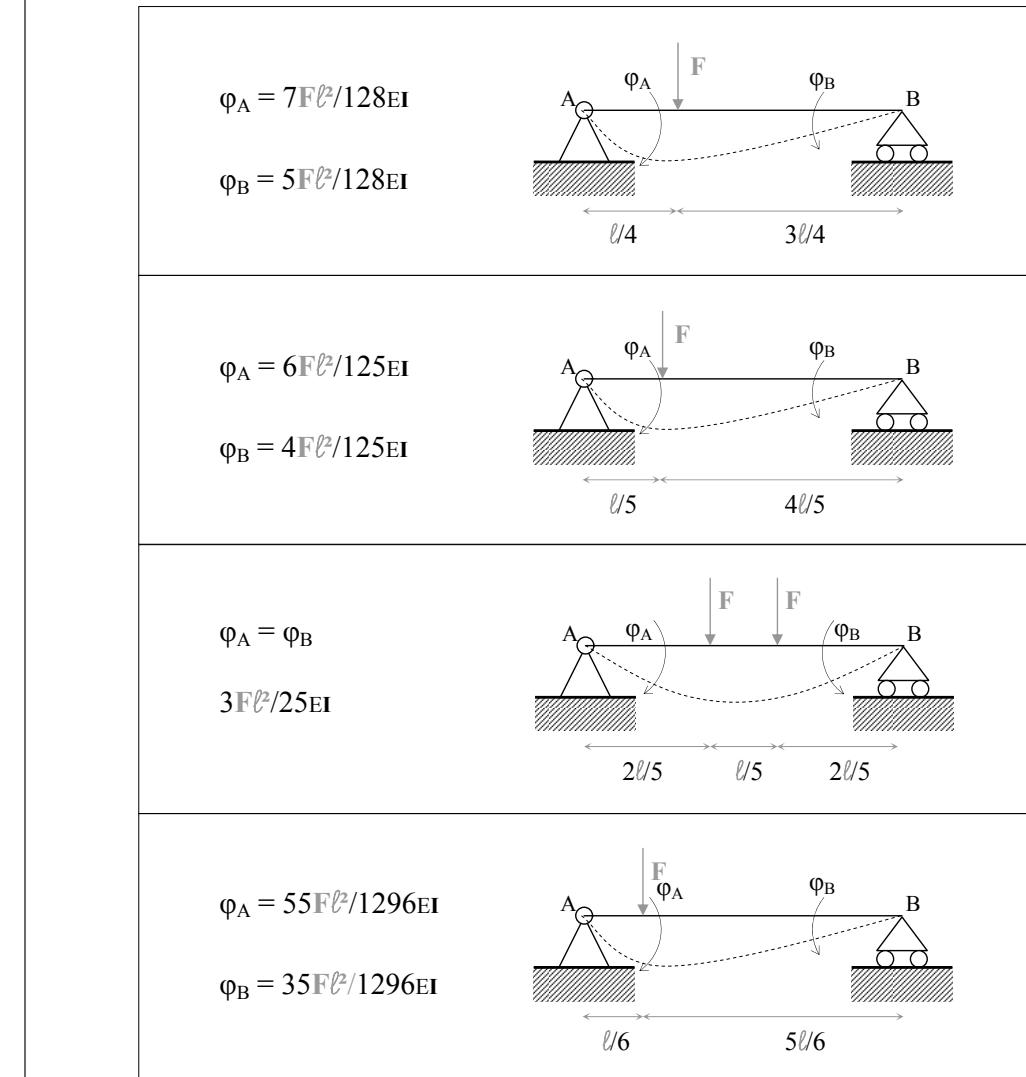
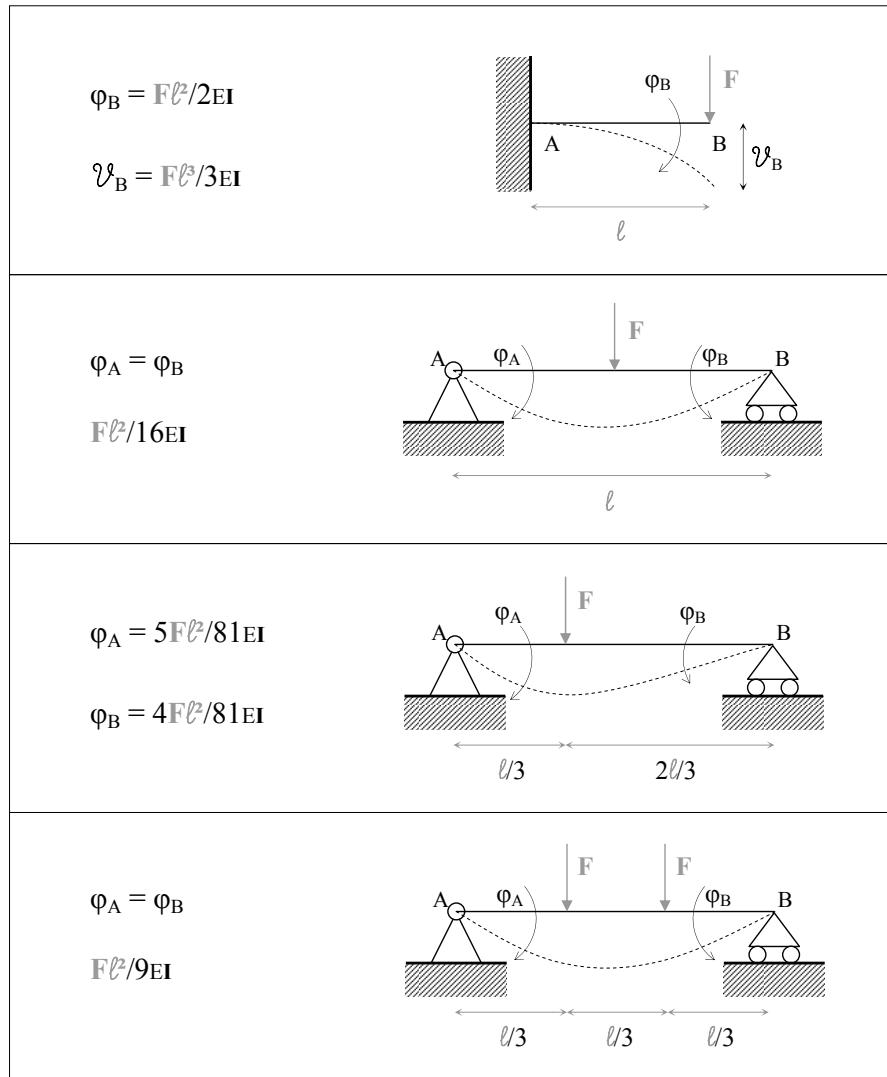
$$\rightarrow [T^{(*)}_B = 13q^3/648EI = \varphi_B]$$



Abbassamenti e rotazioni notevoli.

→ Per ottenere il risultato voluto, sostituire alle *parti in grigio* carichi e lunghezze in analisi.

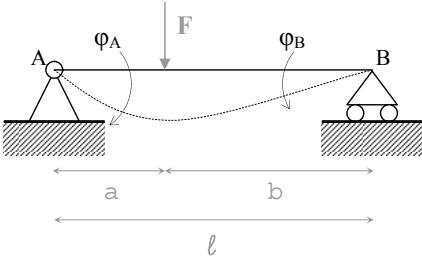
Forze applicate.



Forze applicate (formula generale).

$$\varphi_A = \frac{Fb * (\ell^2 - b^2)}{6EI\ell}$$

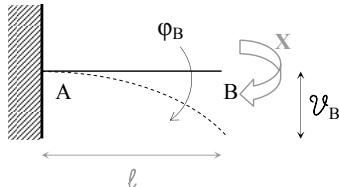
$$\varphi_B = \frac{Fa * (\ell^2 - a^2)}{6EI\ell}$$



Coppie di forze.

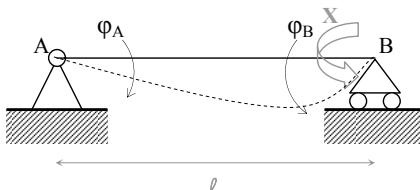
$$\varphi_B = X\ell/EI$$

$$\vartheta_B = X\ell^2/2EI$$



$$\varphi_A = X\ell/6EI$$

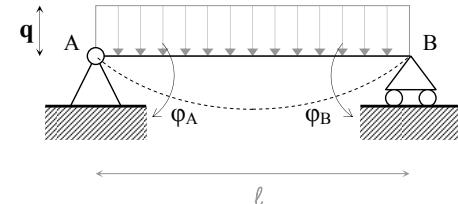
$$\varphi_B = X\ell/3EI$$



Carichi distribuiti.

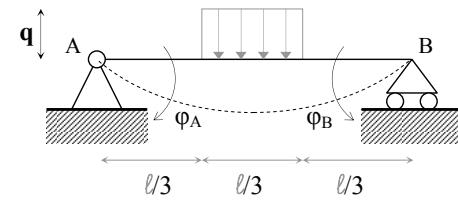
$$\varphi_A = \varphi_B$$

$$q\ell^3/24EI$$



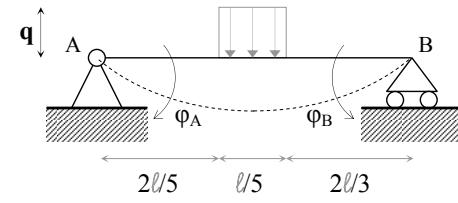
$$\varphi_A = \varphi_B$$

$$13q\ell^3/648EI$$



$$\varphi_A = \varphi_B$$

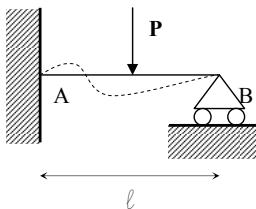
$$37q\ell^3/3000EI$$



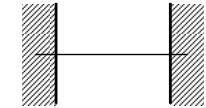
B.3

STRUTTURE IPERSTATICHE

LA TRAVE ELASTICA

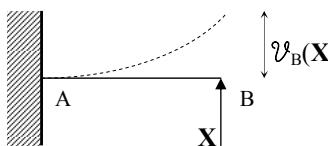
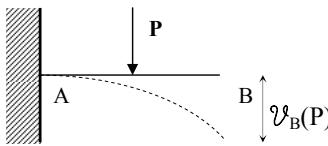
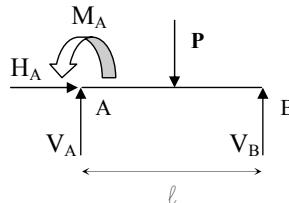


Una trave può, al massimo, essere *tre volte iperstatica* (a destra), e cioè con tre gradi di vincolo in più di un sistema isostatico.



In questo capitolo verranno analizzate strutture *una volta iperstatiche*, con un grado di vincolo in più.

Calcolo dell'incognita iperstatica mediante il metodo delle forze.



- a. Il problema prevede la soluzione di quattro incognite. I mezzi a disposizione sono le tre equazioni fondamentali della statica, che non permettono di risolvere tutte le incognite.
- b. togliere il vincolo in più, rendendo la struttura isostatica, e caricarla con il carico reale. → in questo caso è stato tolto l'appoggio, ma è possibile anche rendere l'incastro una cerniera. Senza l'appoggio, la struttura si deforma nel modo illustrato a fianco, individuando l'abbassamento $V_B(P)$.
- c. il vincolo tolto in B produceva una reazione incognita; se il vincolo fosse rimasto al suo posto l'abbassamento sarebbe stato zero → il vincolo imponeva una *relazione di congruenza* in quel punto. → la reazione deve produrre uno spostamento verticale uguale in modulo ma di verso opposto a quello del sistema senza appoggio; si andrà a calcolare proprio tale abbassamento, che prende il nome di *incognita iperstatica* (X).

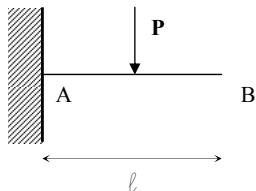
L'incognita iperstatica, una volta calcolata, viene sostituita nel calcolo delle reazioni vincolari, e dà la possibilità di risolvere la struttura. → N.b. sbagliare l'incognita iperstatica significa trovare una possibile configurazione equilibrata, ma non congruente con il sistema di partenza.

Tale metodo prende il nome di *metodo delle forze* → le incognite sono le forze, e fra tutte le soluzioni equilibrate possibili bisogna ricercare quella che restituisce la congruenza. Dunque è necessario verificare che la sovrapposizione degli effetti dei due sistemi, l'isostatico (ISO) e quello dell'incognita iperstatica (INC), restituisca la coerenza iniziale.

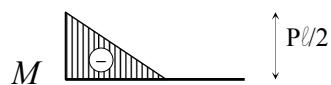
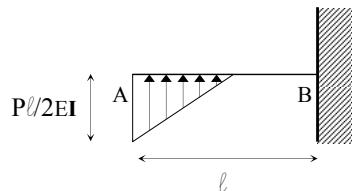
Al fine di restituire la congruenza è necessario redigere un'equazione di congruenza prima di procedere con i calcoli:

$$\mathcal{V}_B(P) + \mathcal{V}_B(X) = 0$$

sistema Reale, carico reale (ISO-sR)



sistema Fittizio, carico reale (ISO-sF)

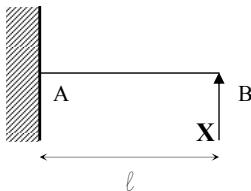


$$q^{(*)} = -P\ell/2EI$$

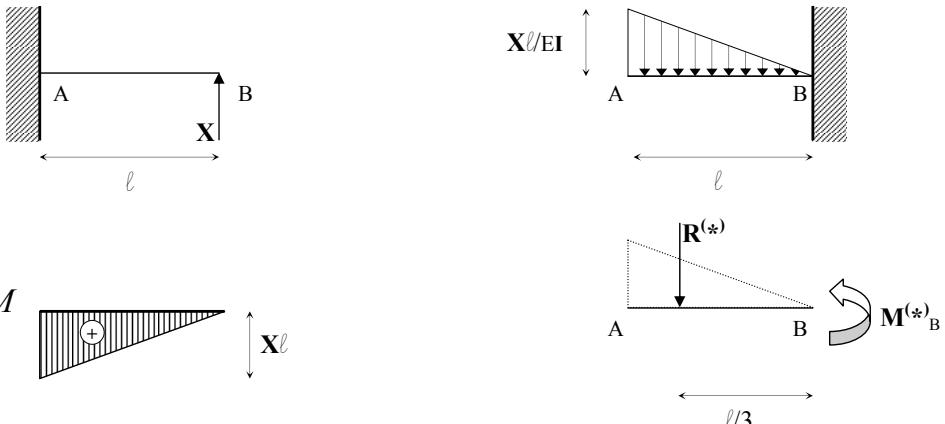
$$R^{(*)} = -P\ell/2EI * \ell/2 * 1/2 = -P\ell^2/8EI$$

$$M^{(*)}_B - P\ell^2/8EI * 5\ell/6 = 0 \rightarrow [M^{(*)}_B = 5P\ell^3/48EI = \mathcal{V}_B(P)]$$

sistema Reale, incognita iperstatica (INC-sR)



sistema Fittizio, incognita iperstatica (INC-sF)



$$q^{(*)} = -X\ell/2EI$$

$$R^{(*)} = -X\ell/2EI * \ell * 1/2 = -X\ell^2/2EI$$

$$M^{(*)}_B - X\ell^2/2EI * 2\ell/3 = 0 \rightarrow [M^{(*)}_B = X\ell^3/3EI = \mathcal{V}_B(X)]$$

e quindi:

$$\mathcal{V}_B(P) + \mathcal{V}_B(X) = 0$$

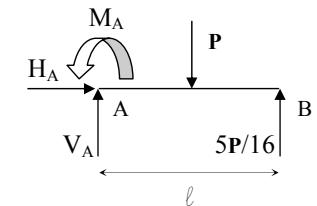
$$5P\ell^3/48EI + X\ell^3/3EI = 0$$

dividendo tutto per ℓ^3 ed EI

$$\rightarrow 5P/48 - X/3 = 0$$

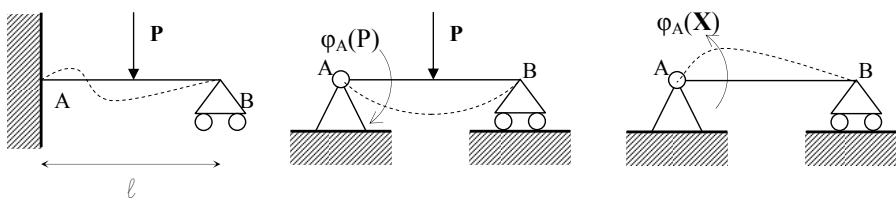
$$\rightarrow [X = 5P/16 = V_B]$$

→ ora il problema è risolvibile con i metodi conosciuti: tre incognite, tre equazioni di equilibrio.



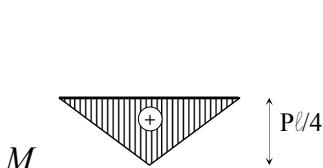
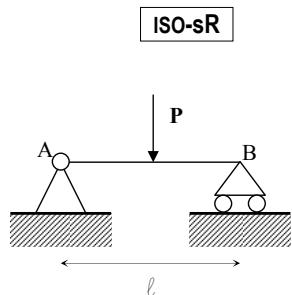
LA TRAVE ELASTICA

Per rendere il sistema isostatico, è anche possibile togliere un grado di vincolo all'incastro, anziché eliminare l'appoggio; in questo caso l'incognita iperstatica sarebbe divenuta la rotazione e non l'abbassamento, poiché l'incastro diverrebbe una cerniera.



La condizione di congruenza deve imporre che fra tutti i valori della coppia X sia trovato quello che permette una rotazione nulla in A.

$$\varphi_B(P) + \varphi_B(X) = 0$$



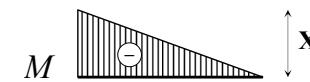
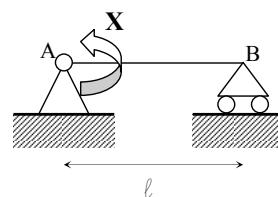
$$q^{(*)} = -P\ell/4EI$$

$$R1^{(*)} = R2^{(*)} = -P\ell/4EI * \ell/2 * 1/2 = -P\ell^2/16EI$$

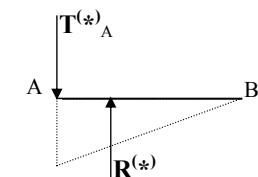
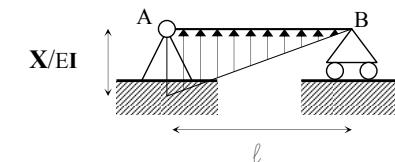
$$M^{(*)}_B + P\ell^2/16EI * \ell/3 + P\ell^2/16EI * 2\ell/3 - T^{(*)}_A * \ell = 0$$

$$T^{(*)}_A = P\ell^2/48EI + 2P\ell^2/48EI \rightarrow T^{(*)}_A = P\ell^2/16EI = \varphi_A(P)$$

INC-sR



ISO-sR



$$q^{(*)} = -X/EI$$

$$R^{(*)} = -X/EI * \ell * 1/2 = -X\ell/2EI$$

$$M^{(*)}_B + X\ell/2EI * 2\ell/3 - T^{(*)}_A * \ell = 0$$

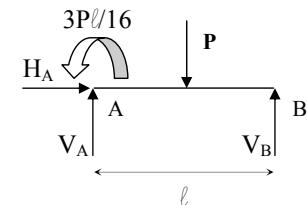
$$\rightarrow T^{(*)}_A = X\ell/3EI = \varphi_A(X)$$

$$\varphi_A(P) + \varphi_A(X) = 0$$

$$\rightarrow -P\ell^2/16EI + X\ell/3EI = 0$$

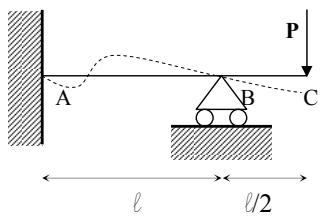
$$\rightarrow -P\ell/16 + X/3 = 0$$

$$\rightarrow X = 3P\ell/16 = M_A$$



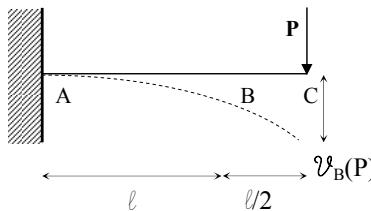
Riassumendo, per risolvere una struttura iperstatica:

- individuare un possibile schema isostatico;
- disegnare la deformata qualitativa sia del sistema iperstatico che dell'isostatico, dalle quali è possibile accorgersi cosa è stato tolto dal sistema iperstatico;
- scrivere un'equazione di congruenza;
- risolvere l'incognita iperstatica ed utilizzarla nel sistema reale.

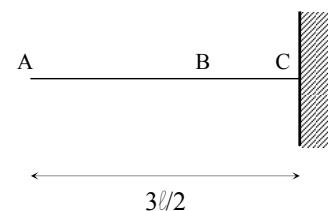
Appendici isostatiche ed oculatezza di risoluzione.

metodo a.

ISO-sR

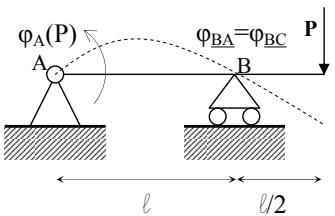


ISO-sF

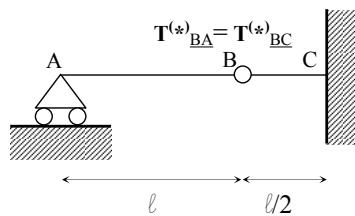


metodo b.

ISO-sR



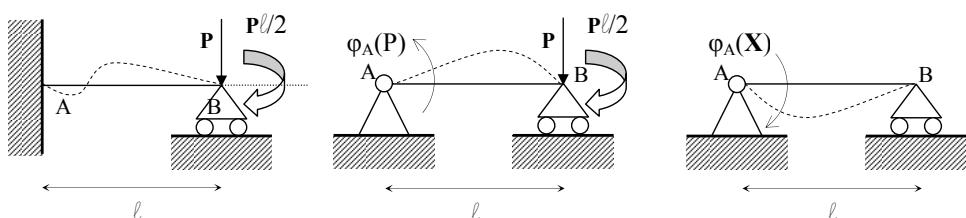
ISO-sF



Ma si nota che il carico P è applicato su di un'*appendice isostatica*, ovvero una *porzione di struttura della quale tutto è noto a priori* → si intende lo sbalzo come una mensola, che caricata sull'estremo libero crea in corrispondenza dell'appoggio B un momento di incastro. → è possibile portare il carico nel vincolo, applicando un conseguente momento di trasporto.

metodo c.

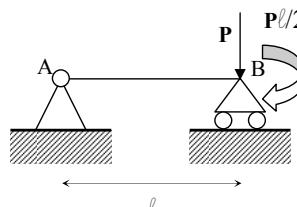
ISO-sR



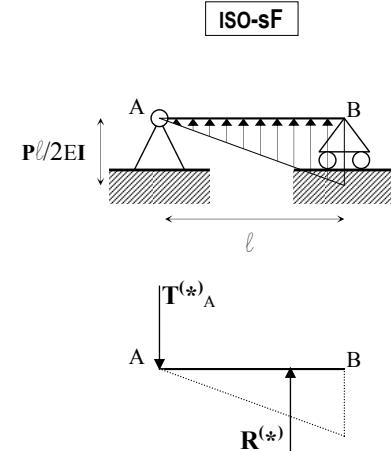
ISO-sF

N.b. è possibile inserire nel calcolo risultati già noti → per un tratto di struttura vincolato da una cerniera ed un appoggio, di lunghezza pari a l , con una coppia C applicata ad un vincolo, il valore di $T^{(*)}$ nel vincolo dove agisce la coppia sarà $C * l/3EI$, mentre nell'estremo non caricato sarà $C * l/6EI$ (vedi esercizio n.18).

ISO-sR

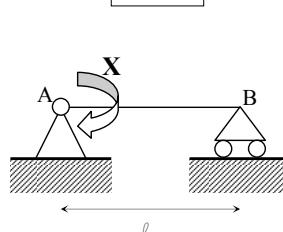


ISO-sF

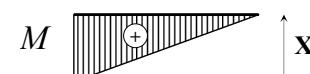
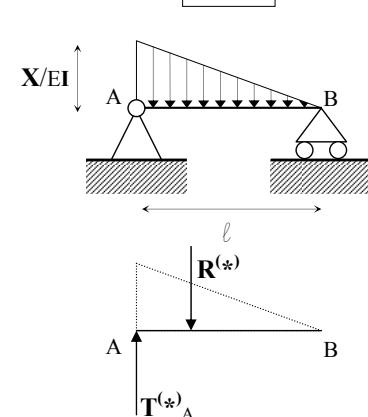


$$T^{(*)}_A = P \cdot l/2 * l/6EI \rightarrow T^{(*)}_A = P l^2 / 12EI = \varphi_A(P)$$

INC-sR



INC-sF



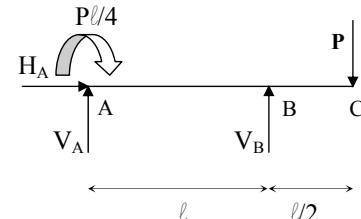
$$T^{(*)}_A = X * l/3EI \rightarrow T^{(*)}_A = X l^2 / 3EI = \varphi_A(X)$$

LA TRAVE ELASTICA

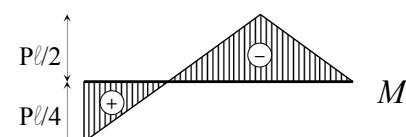
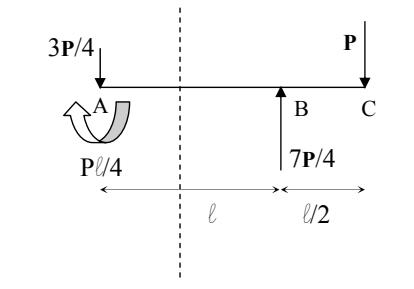
$$\begin{aligned}\phi_A(P) + \phi_A(X) &= 0 \\ \rightarrow P\ell/12EI - X\ell/3EI &= 0 \\ \rightarrow P\ell/12 - X/3 &= 0 \\ \rightarrow X &= P\ell/4 = M_A\end{aligned}$$

Trovata l'incognita iperstatica, si ritorna nel sistema di partenza calcolando le altre reazioni mediante le tre equazioni cardinali della statica.

$$\begin{aligned}\sum H_i &= 0 \rightarrow H_A = 0 \\ \sum V_i &= 0 \rightarrow V_A + V_B - P = 0 \\ \sum M_A &= 0 \rightarrow -P\ell/4 - P \cdot 3\ell/2 + V_B \cdot \ell = 0 \\ \rightarrow V_B &= 3P/2 + P/4 \rightarrow V_B = 7P/4 \\ \rightarrow V_A &= -3P/4\end{aligned}$$



Redigendo il diagramma di corpo libero, è possibile tracciare la linea delle pressioni \rightarrow N.b. è impossibile tracciare la linea delle pressioni a priori, poiché può essere tracciata solamente nell'unico sistema equilibrato possibile, dato dalla soluzione dell'incognita iperstatica.
 \rightarrow A differenza dei capitoli dedicati alla statica della trave, nei calcoli compariranno risultati anche negativi, che stabiliranno il verso delle reazioni a seconda della convenzione stabilita.



Calcolo dell'incognita iperstatica operando una sconnessione interna.

Scartata l'ipotesi di togliere l'appoggio in C (sistema fittizio complicato), l'ipotesi più ragionevole sarebbe togliere l'appoggio in B e calcolare nel medesimo punto l'incognita iperstatica come abbassamento.

Ma in B si verifica la medesima quantità di rotazione nel tratto BA come nel tratto BC, e quindi c'è continuità di momento fra i due tratti \rightarrow la trave può essere intesa come discontinua in B; la congruenza impone l'uguaglianza della rotazione fra i due tratti.

$$\phi_{BA} = \phi_{BC}$$

Calcolare l'incognita iperstatica in B permette di conoscere il valore del momento flettente in quel dato punto, e quindi di utilizzarlo nel calcolo delle reazioni vincolari. In questo caso, quindi, non si calcola una reazione vincolare esterna ma la caratteristica di sollecitazione momento flettente.

È utile disegnare la struttura per pezzi separati, al fine di comporre l'equazione di congruenza e di controllare il segno delle rotazioni. \rightarrow

Da notare, inoltre, che tutti i risultati ricercati sono già stati trovati negli esercizi svolti in precedenza: le rotazioni prodotte da X sono pari a $X\ell/3EI$, e la rotazione in B prodotta da P è $P\ell^2/16EI$.

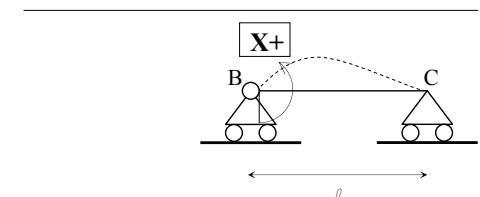
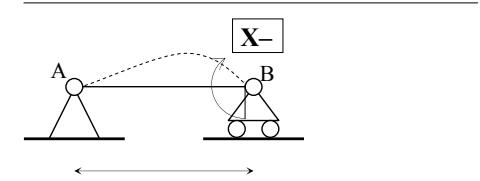
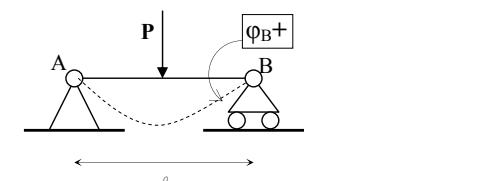
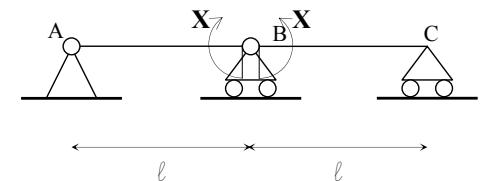
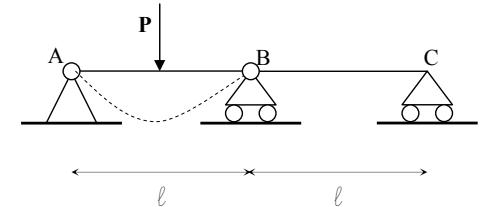
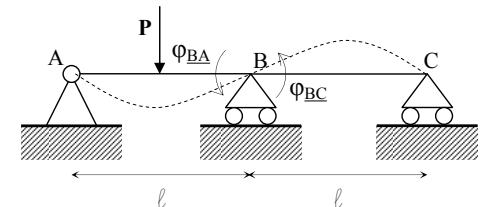
$$\rightarrow T^{(*)}_B = P\ell/4EI * \ell/2 * 1/2 = P\ell^2/16EI$$

$$\phi_B(P) + \phi_B(X) = \phi_B(X)$$

$$\rightarrow P\ell^2/16EI + (-X\ell/3EI) = X\ell/3EI$$

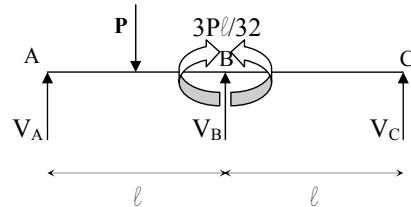
$$\rightarrow P\ell/16 - 2X/3 = 0$$

$$\rightarrow X = 3P\ell/32 = M_B$$



STRUTTURE IPERSTATICHE

Noto il valore del momento in B, la struttura è analizzabile per parti con equazioni ausiliarie → analogamente alla cerniera interna, in questo caso l'incognita iperstatica fornisce un'informazione riguardo il momento flettente in un dato punto, ed il metodo di calcolo diviene analogo.



$$\sum V_i = 0 \rightarrow V_A + V_B + V_C - P = 0$$

$$\sum M_{AB} = 0 \rightarrow M + P \cdot l/2 - V_A \cdot l - 3P/32 = 0 \\ \rightarrow [V_A = 13P/32]$$

$$\sum M_{BC} = 0 \rightarrow M + V_C \cdot l + 3P/32 = 0 \\ \rightarrow [V_C = -3P/32]$$

$$V_B = P - V_C - V_A = P + 3P/32 - 13P/32 \\ \rightarrow [V_B = 11P/16]$$

In verifica dei risultati ottenuti, redigere una equazione globale alla rotazione.

$$\sum M_i = 0 \\ M - 13P/32 \cdot l/2 + 19P/32 \cdot l/2 - 3P/32 \cdot l = 0 \\ \rightarrow M = 13P/64 - 19P/64 + 3P/32 \rightarrow M = 0$$

$$\underline{\text{sezione 01}} \\ 0 \leq x \leq l/2$$

$$\downarrow T \rightarrow [T = 13P/32]$$

$$\overset{\circ}{M} \rightarrow M - 13P/32 \cdot x = 0 \\ \text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0] \\ \text{per } x = l/2 \rightarrow [M = 13P/64]$$

seziona 02

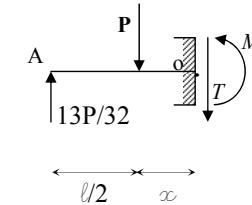
$$0 \leq x \leq l/2$$

$$\downarrow T \rightarrow T - 13P/32 + P = 0 \rightarrow [T = -19P/32]$$

$$\overset{\circ}{M} \rightarrow M - 13P/32 \cdot (l/2 + x) + P \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 13P/64]$$

$$\text{per } x = l/2 \rightarrow M = 13P/64 + 13P/64 - Pl/2 \rightarrow [M = -3Pl/32] \text{ c.v.d.}$$



seziona 03

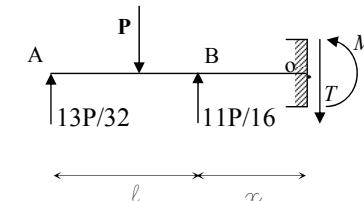
$$0 \leq x \leq l$$

$$\downarrow T \rightarrow T - 13P/32 + P - 11P/16 = 0 \\ \rightarrow [T = 3P/32]$$

$$\overset{\circ}{M} \rightarrow M - 13P/32 \cdot (l + x) + P \cdot (l/2 + x) - 11P/16 \cdot x = 0$$

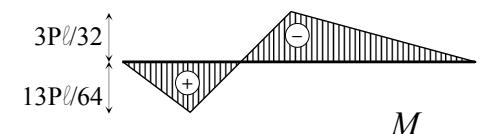
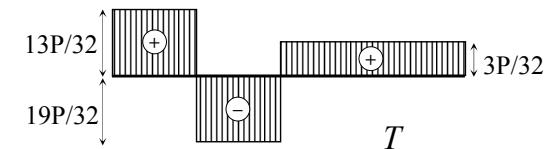
$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = -3Pl/32]$$

$$\text{per } x = l \rightarrow M = 13P/32 + 13P/32 - Pl/2 - Pl + 11Pl/16 \rightarrow [M = 0]$$

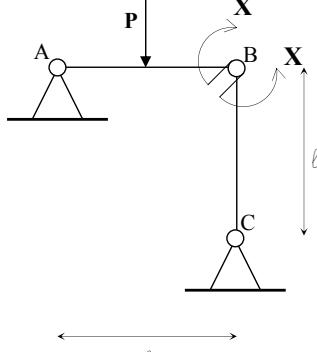
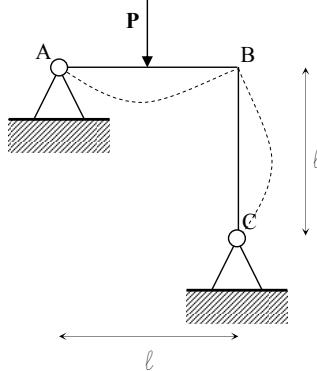


Per conoscere dove il momento è nullo all'interno della struttura, è sufficiente scrivere un equilibrio alla rotazione fra $11P/16$ e $3P/32$.

$$11P/16 \cdot x - 3P/32 \cdot (l + x) = 0 \\ \rightarrow -3Px/32 + 11Px/16 = 3Pl/32 \\ \rightarrow 19x/32 = 3l/32 \rightarrow [x = 3l/19]$$



Esercizio n.22



N.b. in B si considerano due semplificazioni:

- l'angolo è indeformabile;
- considerando l'indeformabilità assiale della trave, il punto B non si abbassa come avverrebbe nella realtà.

Date queste due informazioni, si nota che la situazione è analoga a quella dell'esempio precedente \rightarrow in B si verifica la medesima quantità di rotazione nel tratto AB come nel tratto BC, e quindi c'è continuità di momento fra i due tratti.

$$\varphi_B(P) + \varphi_B(X) = \varphi_B(X)$$

$$\rightarrow P\ell/16EI + (-X\ell/3EI) = X\ell/3EI$$

$$\rightarrow P\ell/16 - 2X/3 = 0$$

$$\rightarrow X = 3P\ell/32 = M_B$$

LA TRAVE ELASTICA

$$\sum H_i = 0 \rightarrow H_A + H_C = 0 \rightarrow H_A = -H_C$$

$$\sum V_i = 0 \rightarrow V_A + V_C - P = 0$$

$$\sum M_{B_{AB}} = 0 \rightarrow M + P\ell/2 - V_A \cdot \ell - 3P\ell/32 = 0$$

$$\rightarrow V_A = 13P/32$$

$$\sum M_{B_{BC}} = 0 \rightarrow M + H_C \cdot \ell + 3P\ell/32 = 0$$

$$\rightarrow H_C = -3P/32$$

$$\rightarrow H_A = 3P/32$$

$$V_C = P - V_A = P - 13P/32$$

$$\rightarrow V_C = 19P/32$$

$$\sum M_i = 0$$

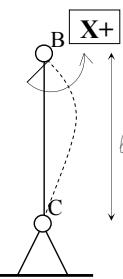
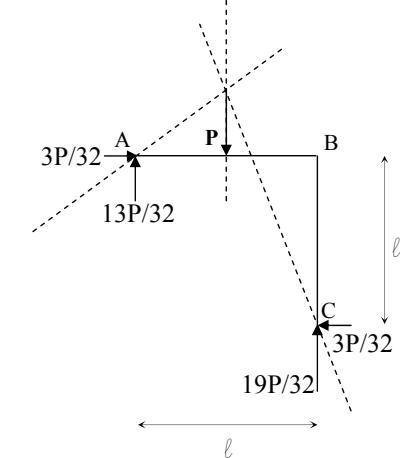
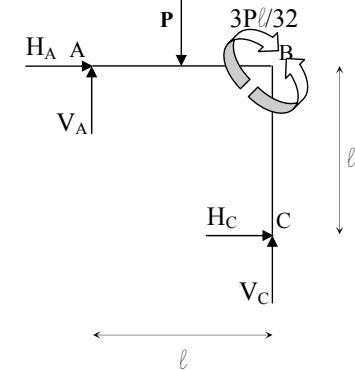
$$M - 13P/32 \cdot \ell/2 + 19P/32 \cdot \ell/2 - 3P/32 \cdot \ell = 0$$

$$\rightarrow M = 13P\ell/64 - 19P\ell/64 + 3P\ell/32 \rightarrow M = 0$$

$$\rightarrow P \cdot x - 13P/32 \cdot (\ell/2 + x) = 0$$

$$\rightarrow P \cdot x + 13P/32 = 11P\ell/32$$

$$\rightarrow 45x/32 = 11\ell/32 \rightarrow x = 11\ell/45$$



STRUTTURE IPERSTATICHE

seziona 01

$$0 \leq x \leq \ell/2$$

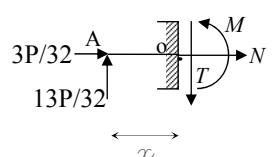
$$\vec{N} \rightarrow [N = -3P/32]$$

$$\downarrow T \rightarrow [T = 13P/32]$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M - 13P/32 \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow [M = 13P\ell/64]$$



seziona 02

$$0 \leq x \leq \ell/2$$

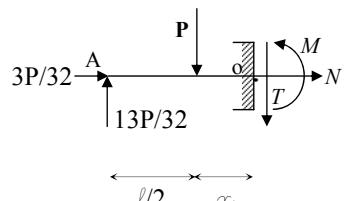
$$\vec{N} \rightarrow [N = -3P/32]$$

$$\downarrow T \rightarrow T - 13P/32 + P = 0 \rightarrow [T = -19P/32]$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M - 13P/32 \cdot (\ell/2 + x) + P \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 13P\ell/64]$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow M = 13P\ell/64 + 13P\ell/64 - P\ell/2 \rightarrow [M = -3P\ell/32]$$



seziona 03

$$0 \leq x \leq \ell$$

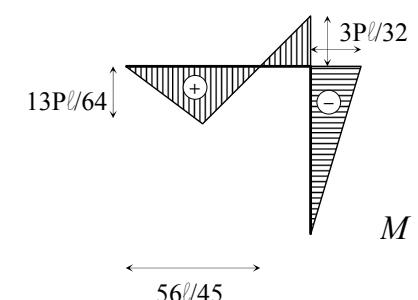
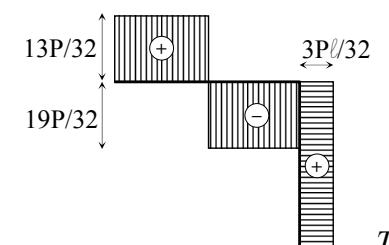
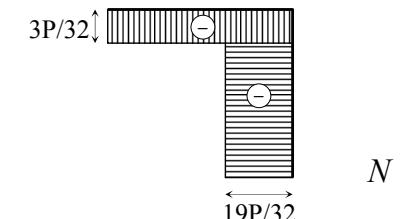
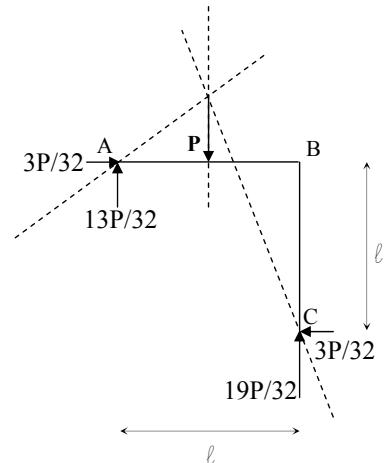
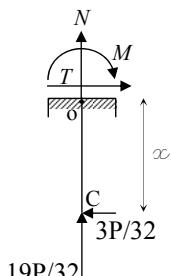
$$\uparrow N \rightarrow [N = -19P/32]$$

$$\vec{T} \rightarrow [T = 3P/32]$$

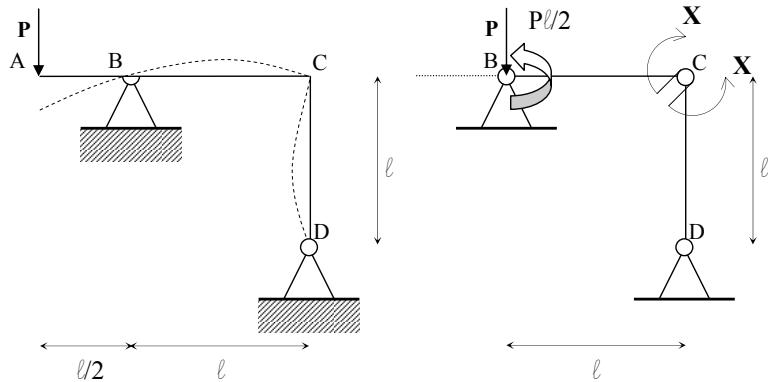
$$\vec{M}_o \rightarrow M + 3P\ell/32 \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell \rightarrow [M = -3P\ell/32]$$



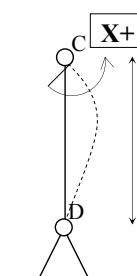
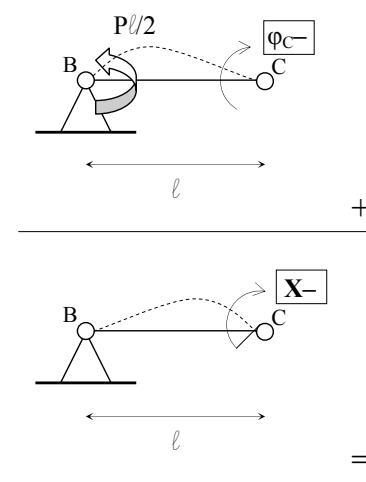
Esercizio n.23



N.b. il tratto AB costituisce una appendice isostatica, e quindi la forza P viene traslata in B applicando un momento di trasporto (vedi p. 60).
Da notare, inoltre, che la forza P trasportata nel vincolo non ha rilevanza alcuna ai fini della flessione, in quanto assorbita direttamente dal vincolo \rightarrow si tiene conto solamente della coppia applicata.

$$\varphi_C(P) + \varphi_C(X) = \varphi_C(X)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow -P^2/12EI + (-Xl/3EI) = Xl/3EI \\ &\rightarrow -P^2/12 - 2X/3 = 0 \\ &\rightarrow X = -P^2/8 = M_C \end{aligned}$$



LA TRAVE ELASTICA

$$\sum H_i = 0 \rightarrow H_B + H_D = 0 \rightarrow H_A = -H_C$$

$$\sum V_i = 0 \rightarrow V_B + V_D - P = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_{C_{BC}} = 0 &\rightarrow M + P*3l/2 - V_B * l + Pl/8 = 0 \\ &\rightarrow V_B = 3P/2 + P/8 \rightarrow V_B = 13P/8 \end{aligned}$$

$$\sum M_{C_{CD}} = 0 \rightarrow M + H_D * l - Pl/8 = 0$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow H_D = P/8 \\ &\rightarrow H_B = -P/8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_D &= P - V_A = P - 13P/8 \\ &\rightarrow V_D = -5P/8 \end{aligned}$$

$$\sum M_i = 0$$

$$M + P * l/2 - 5P/8 * l + P/8 * l = 0$$

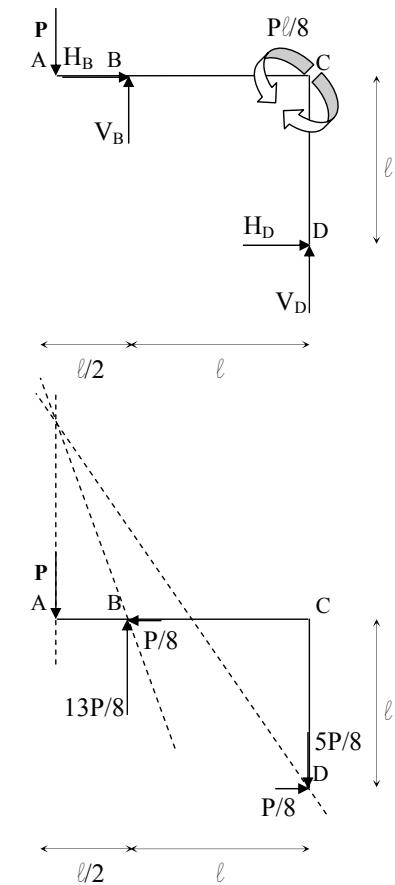
$$\rightarrow M = 5Pl/8 - Pl/8 - Pl \rightarrow M = 0$$

$$\sum M_C = 0$$

$$\rightarrow P*(l/2 + z) - 13P/8 * z = 0$$

$$\rightarrow -Pz + 13Pz/8 = Pl/2$$

$$\rightarrow 5z/8 = l/2 \rightarrow z = 4l/5$$



STRUTTURE IPERSTATICHE

sezione 01

$$0 \leq x \leq \ell/2$$

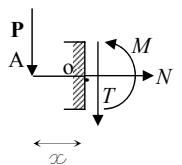
$$\vec{N} \rightarrow [N = 0]$$

$$\downarrow T \rightarrow [T = -P]$$

$$\vec{M}_0 \rightarrow M + P \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow [M = -P\ell/2]$$



sezione 02

$$0 \leq x \leq \ell$$

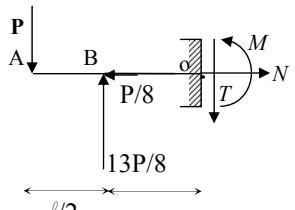
$$\vec{N} \rightarrow [N = P/8]$$

$$\downarrow T \rightarrow T + P - 13P/8 = 0 \rightarrow [T = 5P/8]$$

$$\vec{M}_0 \rightarrow M + P \cdot (\ell/2 + x) - 13P/8 \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell \rightarrow M = 13P\ell/8 - P\ell/2 - P\ell \rightarrow [M = P\ell/8]$$



sezione 03

$$0 \leq x \leq \ell$$

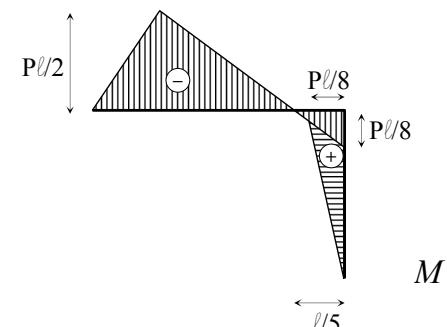
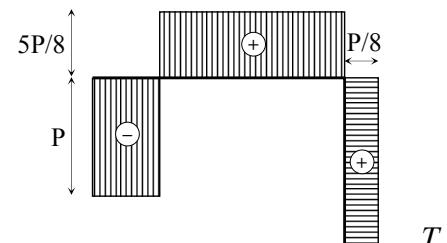
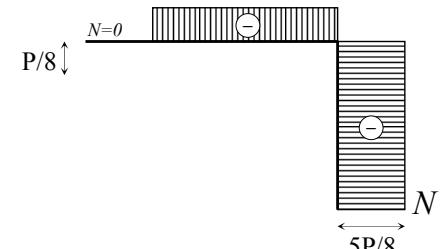
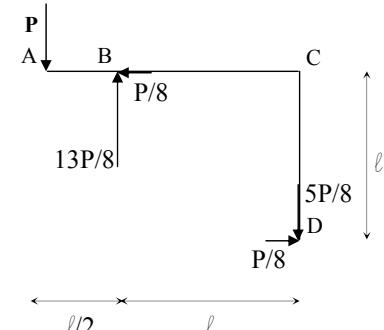
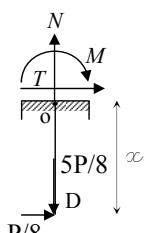
$$\uparrow N \rightarrow [N = 5P/8]$$

$$\vec{T} \rightarrow [T = -P/8]$$

$$\vec{M}_0 \rightarrow M - P/8 \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = P\ell/8]$$

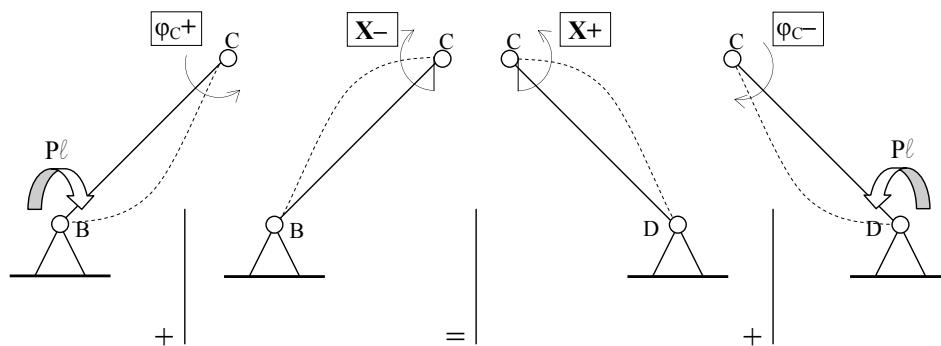
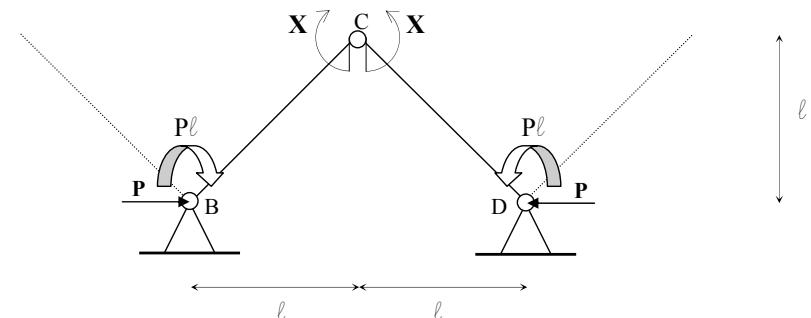
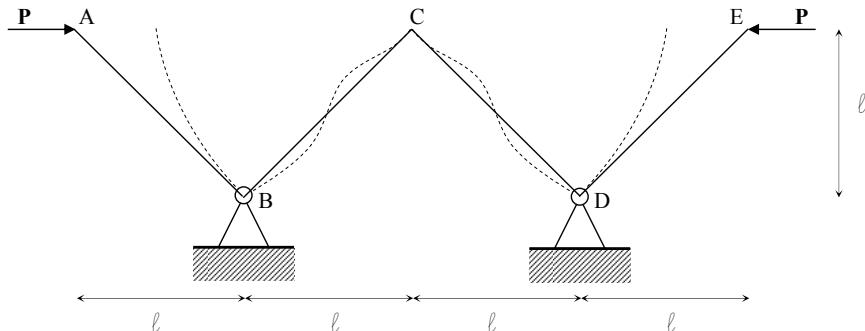
$$\text{per } x = \ell \rightarrow [M = 0]$$



Esercizio n.24



→ struttura simmetrica, caricata simmetricamente.



$$\phi_{C}^{BC}(P) + \phi_{C}^{BC}(X) = \phi_{C}^{CD}(X) + \phi_{C}^{CD}(P)$$

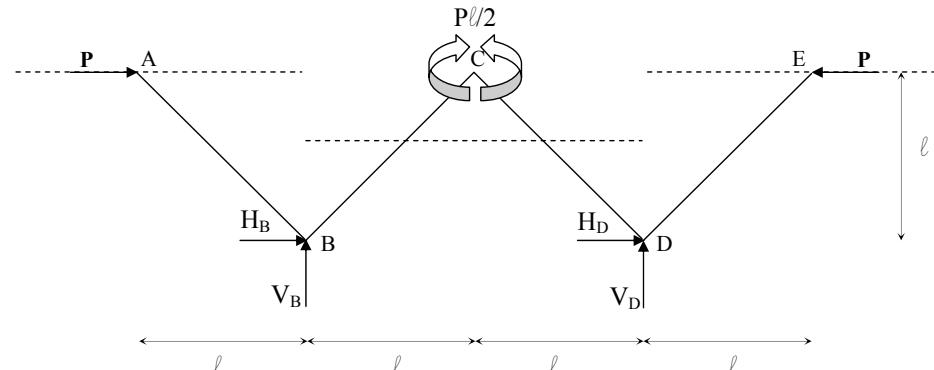
LA TRAVE ELASTICA

$$\rightarrow P\ell^2\sqrt{2/6EI} + (-X\ell\sqrt{2/3EI}) = X\ell\sqrt{2/3EI} - P\ell^2\sqrt{2/6EI}$$

$$\rightarrow P\ell^2\sqrt{2/6EI} + P\ell^2\sqrt{2/6EI} = X\ell\sqrt{2/3EI} + X\ell\sqrt{2/3EI}$$

$$\rightarrow P\ell/3 = 2X/3$$

$$\rightarrow X = P\ell/2 = M_C$$



$$\sum H_i = 0 \rightarrow H_B + H_D - P + P = 0 \rightarrow H_B = -H_D$$

$$\sum V_i = 0 \rightarrow V_B + V_D = 0 \rightarrow V_B = -V_D$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow M + V_D * 2\ell + P * \ell - P * \ell = 0$$

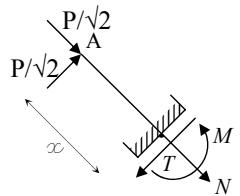
$$\rightarrow V_D = 0$$

$$\rightarrow V_B = 0$$

$$\sum M_{C_{AC}} = 0 \rightarrow M - P\ell/2 + H_B * \ell = 0$$

$$\rightarrow H_B = P/2$$

$$\rightarrow H_D = -P/2$$



sezione 01

$$0 \leq x \leq \ell\sqrt{2}$$

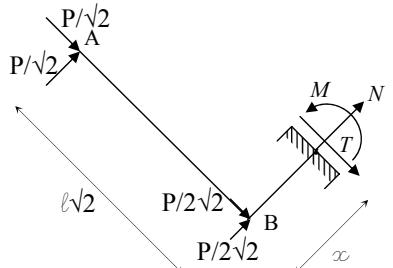
$$\swarrow N \rightarrow N = -P/\sqrt{2}$$

$$\swarrow T \rightarrow T = P/\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{M}_0 \rightarrow M - P/\sqrt{2} \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = \ell\sqrt{2} \rightarrow M = P\ell$$



sezione 02

$$0 \leq x \leq \ell\sqrt{2}$$

$$\swarrow N \rightarrow N + P/\sqrt{2} + P/2\sqrt{2} = 0 \rightarrow N = -3P/2\sqrt{2}$$

$$\swarrow T \rightarrow T + P/\sqrt{2} + P/2\sqrt{2} = 0 \rightarrow T = -3P/2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{M}_0 \rightarrow M - P/\sqrt{2} \cdot \ell\sqrt{2} + P/\sqrt{2} \cdot x + P/2\sqrt{2} \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = P\ell$$

$$\text{per } x = \ell\sqrt{2} \rightarrow M = P\ell - P\ell - P\ell/2 = 0 \rightarrow M = -P\ell/2$$

sezione 03

$$0 \leq x \leq \ell\sqrt{2}$$

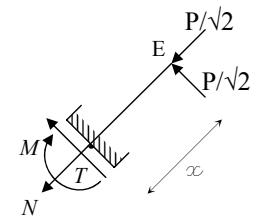
$$\swarrow N \rightarrow N = -P/\sqrt{2}$$

$$\swarrow T \rightarrow T = P/\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{M}_0 \rightarrow M - P/\sqrt{2} \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = \ell\sqrt{2} \rightarrow M = P\ell$$



sezione 04

$$0 \leq x \leq \ell\sqrt{2}$$

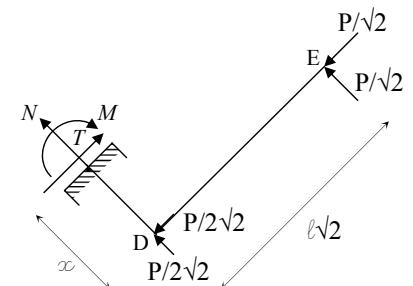
$$\swarrow N \rightarrow N + P/\sqrt{2} + P/2\sqrt{2} = 0 \rightarrow N = -3P/2\sqrt{2}$$

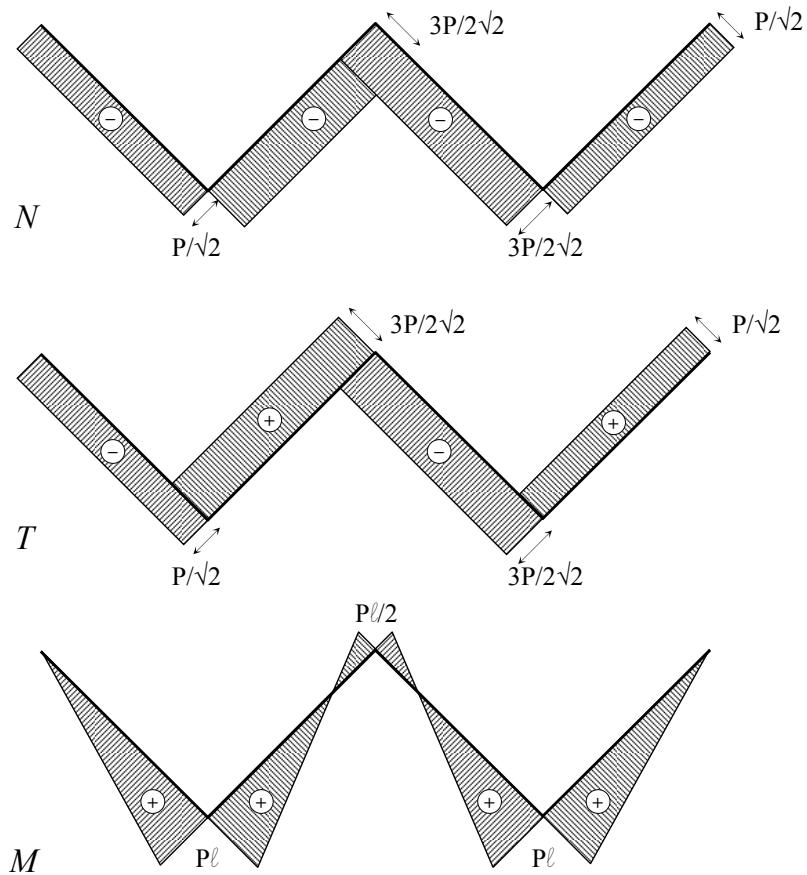
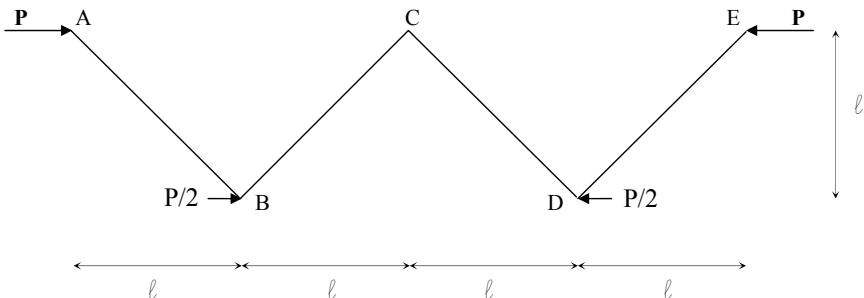
$$\swarrow T \rightarrow T - P/\sqrt{2} - P/2\sqrt{2} = 0 \rightarrow T = 3P/2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{M}_0 \rightarrow M - P/\sqrt{2} \cdot \ell\sqrt{2} + P/\sqrt{2} \cdot x + P/2\sqrt{2} \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = P\ell$$

$$\text{per } x = \ell\sqrt{2} \rightarrow M = P\ell - P\ell - P\ell/2 = 0 \rightarrow M = -P\ell/2$$



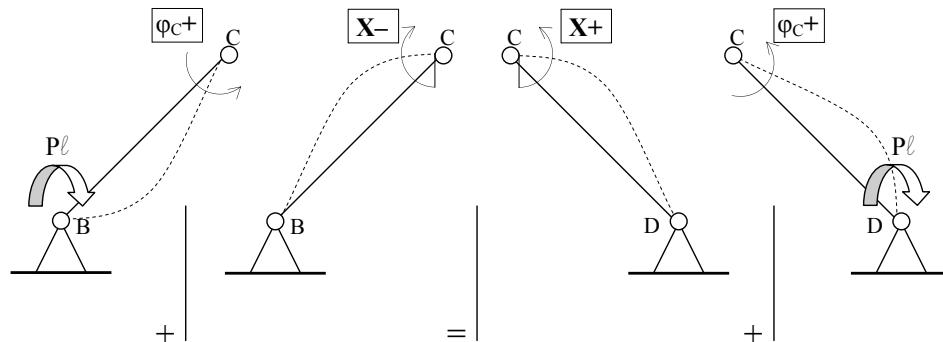
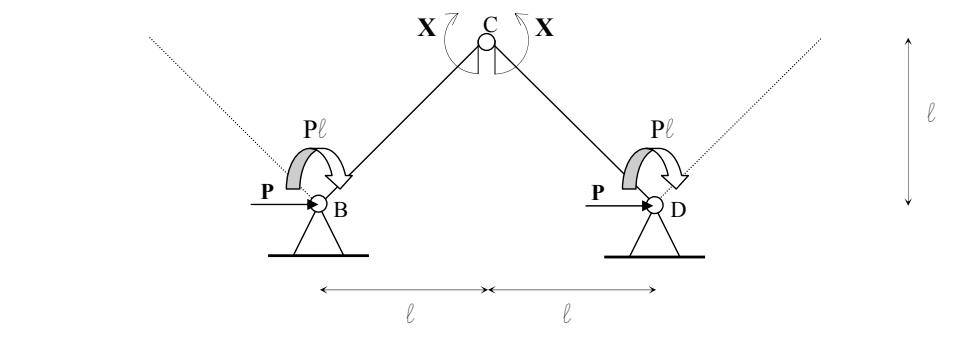
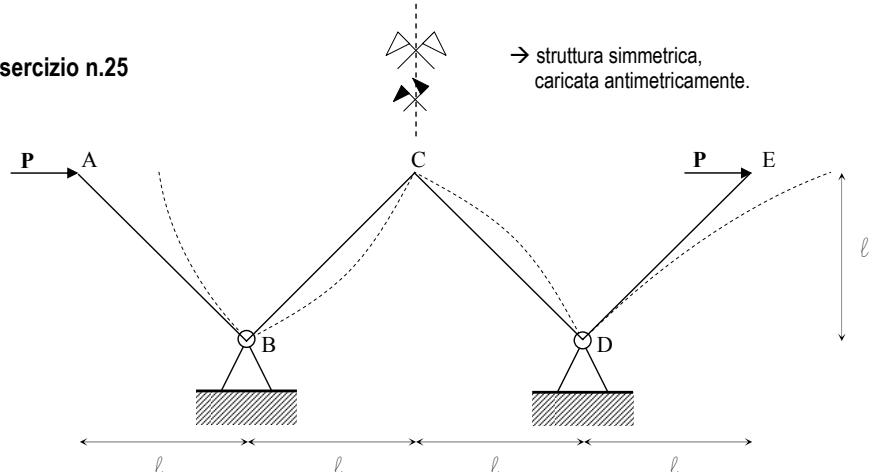


N.b. carico simmetrico e struttura simmetrica:
→ *grafici di momento e sforzo normale simmetrici, taglio antimetrico.*

LA TRAVE ELASTICA

Esercizio n.25

→ struttura simmetrica,
caricata antimetricamente.



$$\varphi_C^{\text{BC}}(P) + \varphi_C^{\text{BC}}(X) = \varphi_C^{\text{CD}}(X) + \varphi_C^{\text{CD}}(P)$$

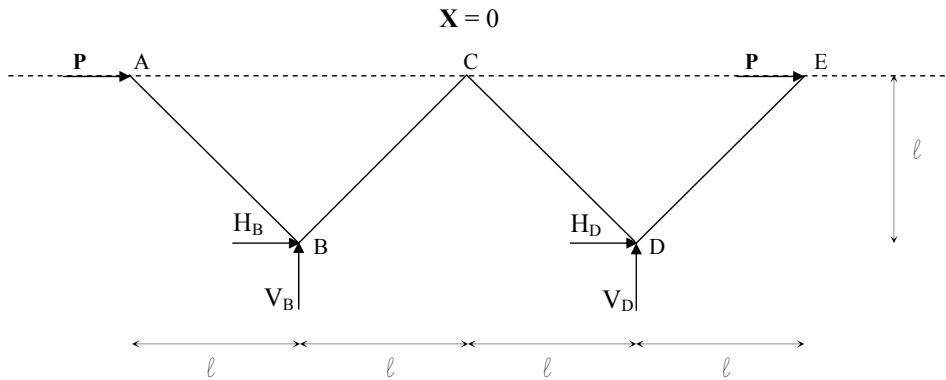
STRUTTURE IPERSTATICHE

$$\rightarrow P\ell^2\sqrt{2}/6EI + (-X\ell\sqrt{2}/3EI) = X\ell\sqrt{2}/3EI + P\ell^2\sqrt{2}/6EI$$

$$\rightarrow P\ell^2\sqrt{2/6EI} - P\ell^2\sqrt{2/6EI} = X\ell\sqrt{2/3EI} + X\ell\sqrt{2/3EI}$$

$$\rightarrow 0 = 2\mathbf{X}/3$$

$$\rightarrow X = 0 = M_C$$



$$\sum H_i = 0 \rightarrow H_B + H_D + 2P = 0$$

$$\Sigma V_i = 0 \rightarrow V_B + V_D = 0 \rightarrow V_B = -V_D$$

$$\Sigma MB = 0 \rightarrow M + V_D * 2\ell - P * \ell - P * \ell = 0$$

$$\rightarrow V_D = P$$

$$\rightarrow V_B = -P$$

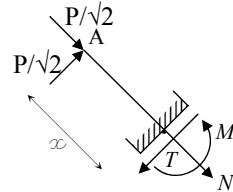
$$\Sigma MC_{AC} = 0 \rightarrow M + H_B * \ell + V_B * \ell = 0$$

$$\rightarrow \boxed{H_B = -P}$$

$$\rightarrow \underbrace{H_D}_{B} = P - 2P \rightarrow H_D = -P$$

$$\sum M_i = 0$$

$$M + P * 2\ell - 2P * \ell = 0 \rightarrow M = 0$$



sezione 01

$$0 \leq x \leq \ell\sqrt{2}$$

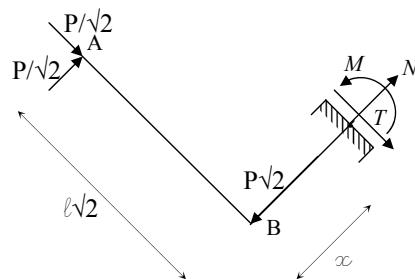
$$\nearrow N \rightarrow N = -P/\sqrt{2}$$

$$\checkmark T \rightarrow T = P/\sqrt{2}$$

$$M_0 \rightarrow M - P/\sqrt{2} * \alpha \equiv 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = \ell\sqrt{2} \rightarrow M = P\ell$$



sezione 02

$$0 \leq x \leq \ell\sqrt{2}$$

$$N \rightarrow N + P/\sqrt{2} - P\sqrt{2} = 0 \rightarrow N = P/\sqrt{2}$$

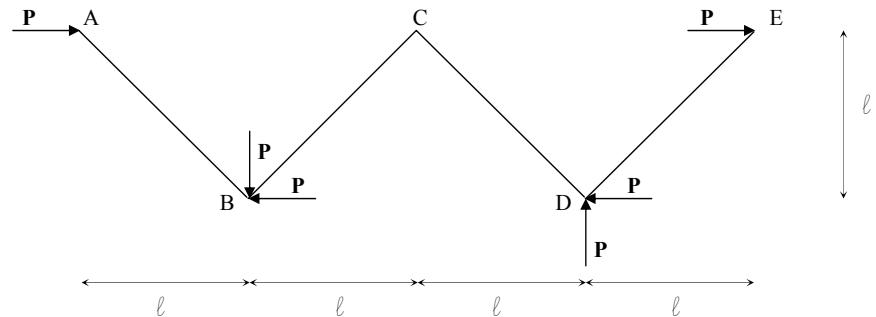
$$\checkmark T \rightarrow T + P/\sqrt{2} + P/2\sqrt{2} = 0 \rightarrow T = -P/\sqrt{2}$$

$$M_0 \rightarrow M - P/\sqrt{2} * \ell \sqrt{2} + P/\sqrt{2} * x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = P\ell$$

$$\text{per } x = \ell\sqrt{2} \rightarrow M = P\ell - P\ell \rightarrow M = 0$$

LA TRAVE ELASTICA



sezione 03

$$0 \leq x \leq l\sqrt{2}$$

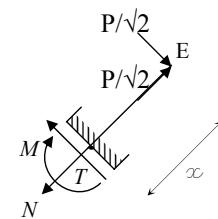
$$\nearrow N \rightarrow [N = P/\sqrt{2}]$$

$$\nearrow T \rightarrow [T = P/\sqrt{2}]$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M + P/\sqrt{2} \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = l\sqrt{2} \rightarrow [M = -Pl]$$



sezione 04

$$0 \leq x \leq l\sqrt{2}$$

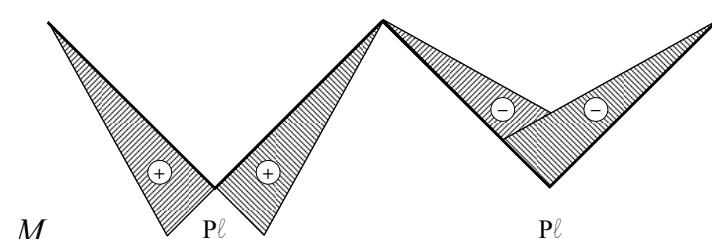
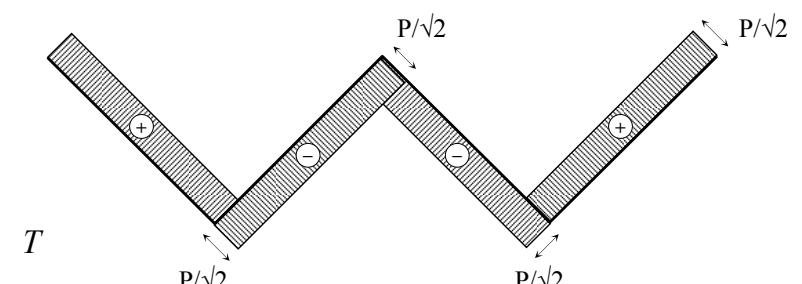
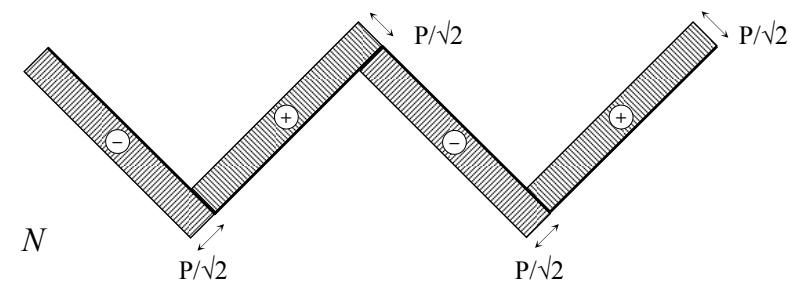
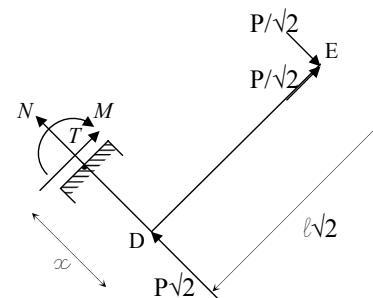
$$\nearrow N \rightarrow N - P/\sqrt{2} + P\sqrt{2} = 0 \rightarrow [N = -P/\sqrt{2}]$$

$$\nearrow T \rightarrow T + P/\sqrt{2} + P/2\sqrt{2} = 0 \rightarrow [T = -P/\sqrt{2}]$$

$$\curvearrowleft M_o \rightarrow M - P/\sqrt{2} \cdot l\sqrt{2} + P/\sqrt{2} \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = -Pl]$$

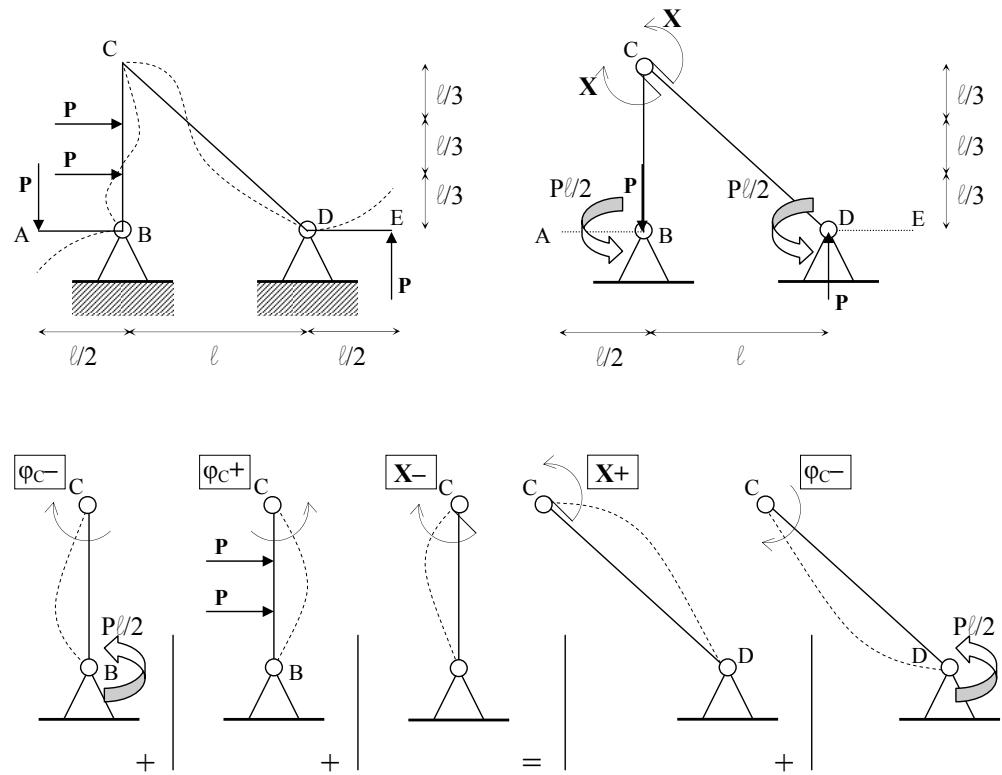
$$\text{per } x = l\sqrt{2} \rightarrow M = Pl - Pl \rightarrow [M = 0]$$



N.b. carico antimetrico e struttura simmetrica:

→ grafici di momento e sforzo normale antimetrici, taglio simmetrico.

Esercizio n.26



$$\varphi_{C}^{BC}(P) + \varphi_{C}^{BC}(P+P) + \varphi_{C}^{BC}(X) = \varphi_{C}^{CD}(X) + \varphi_{C}^{CD}(P)$$

$$\rightarrow -P\ell^2/12EI + P\ell^2/9EI + (-X\ell/3EI) = X\ell\sqrt{2}/3EI + (-P\ell^2\sqrt{2}/12EI)$$

$$\rightarrow -P\ell^2/12EI + P\ell^2/9EI + P\ell^2\sqrt{2}/12EI = X\ell\sqrt{2}/3EI + X\ell/3EI$$

$$\rightarrow -P\ell/12 + P\ell/9 + P\ell\sqrt{2}/12 = X\sqrt{2}/3 + X/3$$

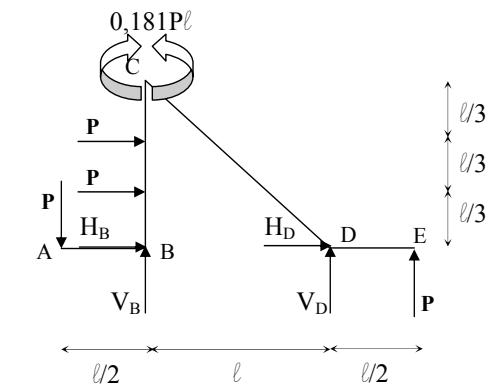
$$\rightarrow -0,0833P\ell + 0,1111P\ell + 0,1179P\ell = 0,4714X + 0,3333X$$

$$\rightarrow 0,1457P\ell = 0,8047X$$

$$\rightarrow X = 0,181P\ell = M_C$$

N.b. il risultato della rotazione prodotta dalle due forze P nel tratto BC è data dal risultato precedentemente contemplato nell'esercizio n.19 \rightarrow forze in $\ell/3$; $T^{(*)} = P\ell^2/9EI$.

$$\sum H_i = 0 \rightarrow H_B + H_D + 2P = 0$$



$$\begin{aligned} \sum V_i = 0 &\rightarrow V_B + V_D - P + P = 0 \\ &\rightarrow V_B = -V_D \end{aligned}$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow M - V_B * \ell + P * 3\ell/2 + P * \ell/2 - P * 2\ell/3 - P * \ell/3 = 0$$

$$\rightarrow V_B = 2P - P \rightarrow \boxed{V_B = P}$$

$$\rightarrow \boxed{V_D = -P}$$

$$\sum M_{CD} = 0 \rightarrow M + H_D * \ell - P * \ell + P * 3\ell/2 + 0,181P\ell = 0$$

$$\rightarrow H_D = P - 1,5P - 0,181P \rightarrow \boxed{H_D = -0,681P}$$

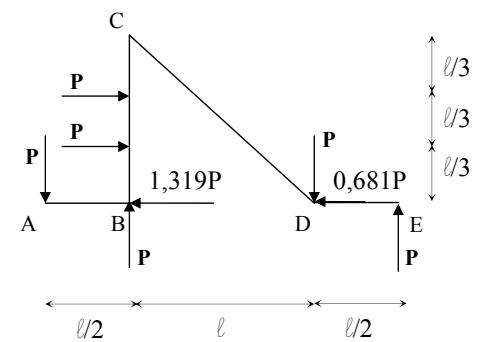
$$\rightarrow H_B = -2P - (-0,681P) \rightarrow \boxed{H_B = -1,319P}$$

$$\sum M_i = 0$$

$$M + P * \ell/2 - 0,834P * \ell + P * \ell/3 = 0$$

$$\rightarrow M = -0,5P\ell + 0,834P\ell - 0,333P\ell$$

$$\rightarrow M \approx 0$$



LA TRAVE ELASTICA

seziona 01

$$0 \leq x \leq \ell/2$$

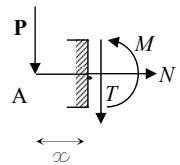
$$\vec{N} \rightarrow [N = 0]$$

$$\downarrow T \rightarrow [T = -P]$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M + P \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow [M = -0,5P\ell]$$



seziona 02

$$0 \leq x \leq \ell/3$$

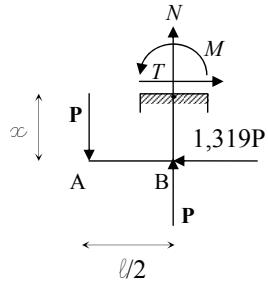
$$\uparrow N \rightarrow N + P - P = 0 \rightarrow [N = 0]$$

$$\vec{T} \rightarrow [T = 1,319P]$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M + P \cdot \ell/2 - 1,319P \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = -0,5P\ell]$$

$$\text{per } x = \ell/3 \rightarrow M = 0,44P\ell - 0,5P\ell \rightarrow [M = -0,06P\ell]$$



seziona 03

$$0 \leq x \leq \ell/3$$

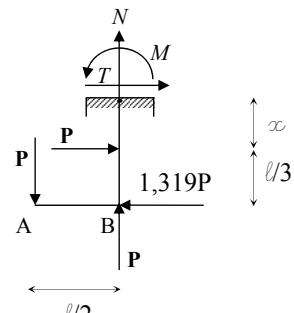
$$\uparrow N \rightarrow N + P - P = 0 \rightarrow [N = 0]$$

$$\vec{T} \rightarrow [T = 0,319P]$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M + P \cdot \ell/2 - 1,319P \cdot (\ell/3 + x) + P \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0,44P\ell - 0,5P\ell \rightarrow [M = -0,06P\ell]$$

$$\text{per } x = \ell/3 \rightarrow M = 0,44P\ell + 0,44P\ell - 0,5P\ell - 0,333P\ell \rightarrow [M = 0,047P\ell]$$



seziona 04

$$0 \leq x \leq \ell/3$$

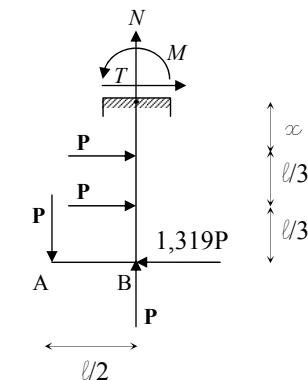
$$\uparrow N \rightarrow N + P - P = 0 \rightarrow [N = 0]$$

$$\vec{T} \rightarrow [T = -0,681P]$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M + P \cdot \ell/2 - 1,319P \cdot (\ell/3 + \ell/3 + x) + P \cdot (\ell/3 + x) + P \cdot x = 0$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0,44P\ell + 0,44P\ell - 0,5P\ell - 0,333P\ell \rightarrow [M = 0,047P\ell]$$

$$\text{per } x = \ell/3 \rightarrow M = 0,44P\ell + 0,44P\ell + 0,44P\ell - 0,5P\ell - 0,333P\ell - 0,333P\ell - 0,333P\ell \rightarrow [M = -0,18P\ell]$$



seziona 05

$$0 \leq x \leq \ell/2$$

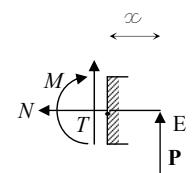
$$\vec{N} \rightarrow [N = 0]$$

$$\uparrow T \rightarrow [T = -P]$$

$$\vec{M}_o \rightarrow M - P \cdot x = 0$$

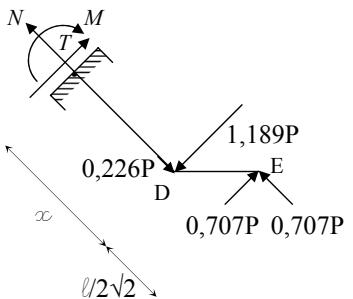
$$\text{per } x = 0 \rightarrow [M = 0]$$

$$\text{per } x = \ell/2 \rightarrow [M = 0,5P\ell]$$



STRUTTURE IPERSTATICHE

seziona 06
 $0 \leq x \leq \ell\sqrt{2}$



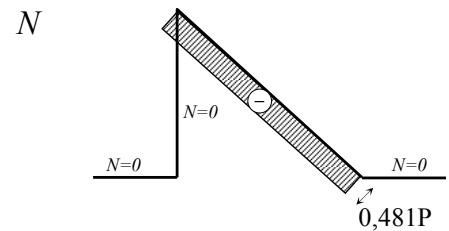
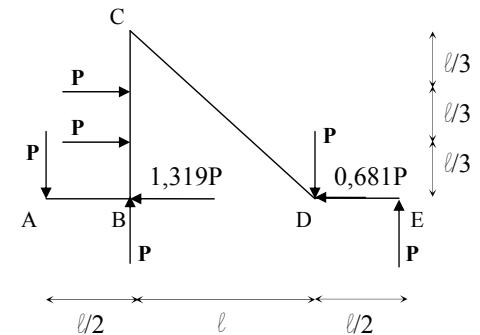
$$\nearrow N \rightarrow N + 0,707P - 0,226P = 0 \rightarrow N = -0,481P$$

$$\nearrow T \rightarrow T + 0,707P - 1,189P = 0 \rightarrow T = 0,481P$$

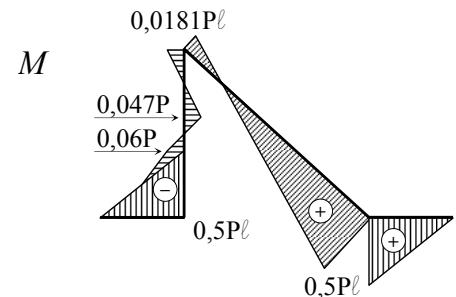
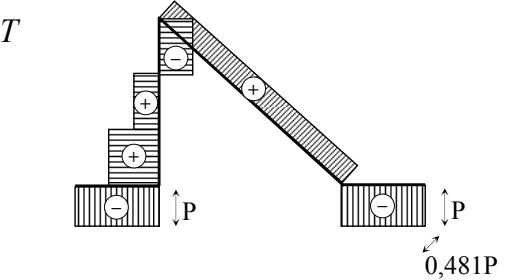
$$(M_o \rightarrow M - 0,707P \cdot \ell/2\sqrt{2} - 0,707P \cdot (\ell/2\sqrt{2} + x) + 1,189P \cdot x = 0)$$

$$\text{per } x = 0 \rightarrow M = 0$$

$$\text{per } x = \ell\sqrt{2} \rightarrow M = 0,25P\ell + 0,25P\ell + P\ell - 1,681 = 0 \rightarrow M = -0,181P\ell$$

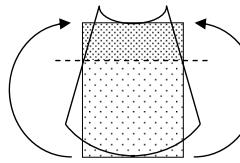


$$1,319P \\ 0,319P \underset{\ell}{\longleftrightarrow} 0,681P$$



C.1

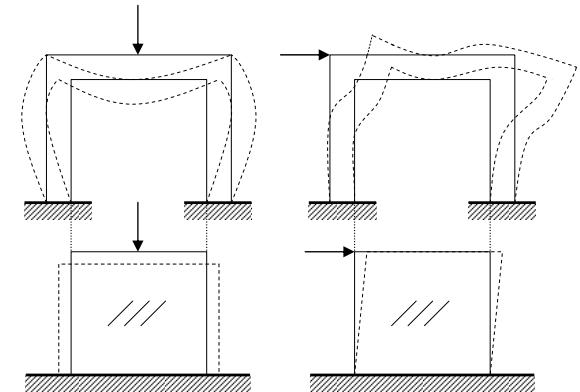
ANALISI DELLA DEFORMAZIONE



Considerando tutti i punti di cui è costituito il concio in seguito alla deformazione flessionale, sotto l'asse neutro si allontanano e sopra si avvicinano. → è evidente che non tutti i materiali possono resistere a determinati tipi di deformazione, e che la deformazione flessionale non esaurisce le possibili deformazioni dei corpi. Verranno quindi affrontati i *tipi di deformazione* e le *deformazioni lecite* per ogni materiale.

Ad esempio: un telaio metallico accoppiato ad una lastra di vetro.

→ Il metallo si deforma molto, il vetro quasi per nulla.
→ è necessario studiare la compatibilità fra materiali, e quindi conoscerne le modalità di deformazione.



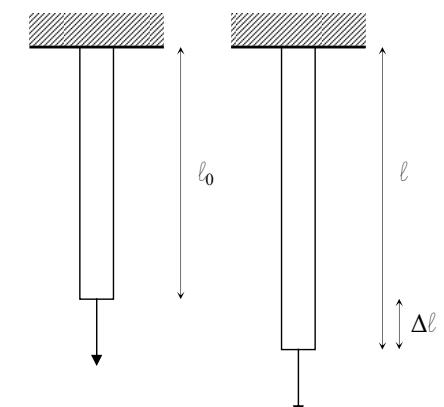
Ad esempio, i telai metallici di Mies Van der Rohe sono tutti sovradimensionati, al fine di deformarsi meno → la struttura reggerebbe ugualmente anche con dimensioni minori, ma si deformerebbe troppo spaccando il vetro.

Le teorie sulla deformazione sono state formalizzate grazie a Cauchy, che ha definito la deformazione come il rapporto fra le variazioni di lunghezza di un concio e la lunghezza iniziale dello stesso.

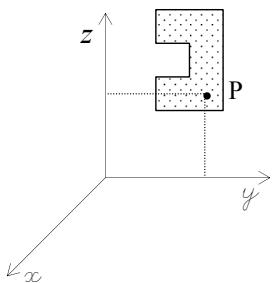
$$\varepsilon \text{ (deformazione)} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

→ *dilatazione lineare specifica*.

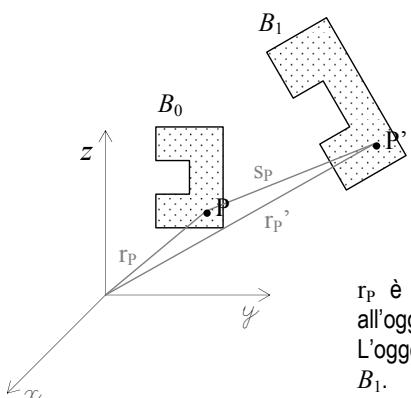
$\varepsilon > 0$ → elongazione lineare specifica
 $\varepsilon < 0$ → contrazione lineare specifica



Tutto ciò, però, non è sufficiente ad interpretare tutte le deformazioni compatibili con i materiali.

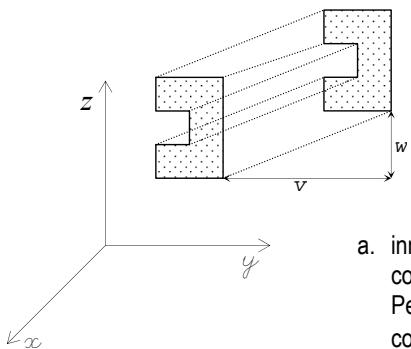


Si analizzi un oggetto costituito da un insieme di punti materiali → è necessario individuare la posizione di ciascun punto, e quindi si pone un sistema di riferimento.



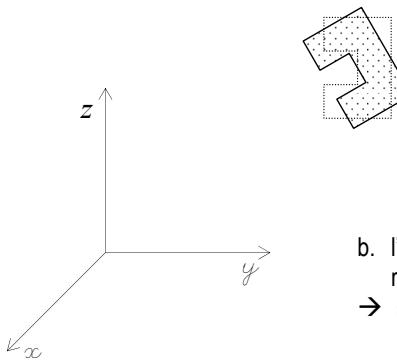
r_P è il raggio che congiunge il punto P , appartenente all'oggetto, con l'origine degli assi.
L'oggetto subisce una trasformazione dallo stato B_0 allo stato B_1 .

$$r_P' = r_P + s_P \quad r_P = (x, y, z)$$

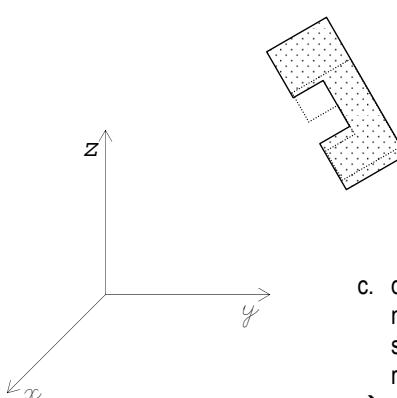


a. innanzitutto, l'oggetto subisce una traslazione, con tre componenti u, v, w .
Per semplicità, nel caso in figura si considerano solo le componenti v e w associate al piano yz .

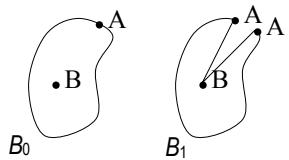
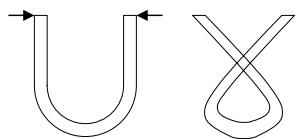
$$\rightarrow s_P = t(v, w)$$



b. l'oggetto ruota. La rotazione di un punto dipende dalla rotazione ω più la distanza d dal centro di rotazione.
 $\rightarrow s_P = t + \omega * d$



c. quanto analizzato in precedenza fa ancora parte del movimento rigido dell'oggetto, che alla fine va anche stirato. → è possibile porre dei vincoli al movimento rigido, ma non bloccare la deformazione.
 $\rightarrow s_P = t + \omega d + \varepsilon$
 \rightarrow la ε è l'unica parte dell'espressione relativa alla deformazione pura. Non è possibile vincolarla poiché fa parte delle proprietà dei materiali stessi.



N.b. *ogni punto deve mantenere la sua identità.*

← Qui l'oggetto si compenetrerebbe, non è realmente accettabile. → nulla si crea - nulla si distrugge, i punti si fanno più vicini o più lontani ma non si compenetrano → teoria della permanenza della materia.

Saranno trattate solamente *trasformazioni topologiche*.

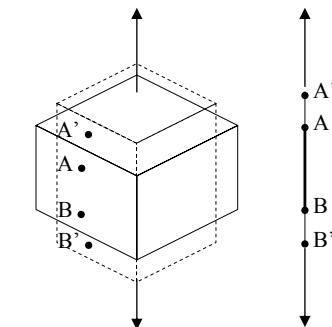
← il punto A, nella configurazione B_0 punto di frontiera, si sdoppia nella configurazione B_1 ed il punto B, prima interno, diviene di frontiera. Non saranno affrontate situazioni di questo tipo, che vengono analizzate nella meccanica della frattura → le deformazioni studiate saranno sempre reversibili ed elastiche.

**Dilatazione lineare specifica
(variazione di dimensione)**

I punti in direzione delle forze si allontanano →

$$\varepsilon_n = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

→ per sapere come si deforma un oggetto è necessario conoscere due punti su di esso, e la deformazione relativa fra di essi.

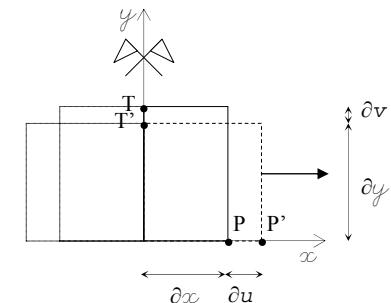


In termini differenziali:

$$\varepsilon_x = \frac{(\partial u + \partial x) - \partial x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

→ esiste una relazione funzionale fra spostamento e deformazione.

u è la funzione spostamento secondo la direzione x ; facendo la derivata secondo x si ottiene la dilatazione lineare specifica secondo x stessa.

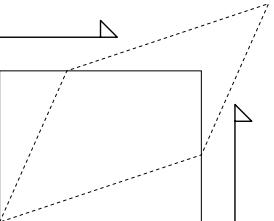
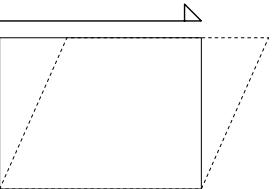
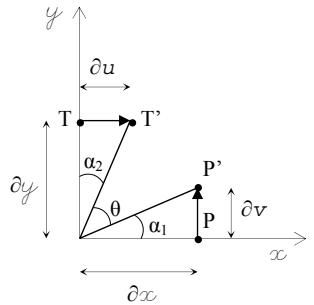


$$\varepsilon_y = \frac{(\partial v + \partial y) - \partial y}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{(\partial w + \partial z) - \partial z}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

N.b. questo tipo di deformazione implica che gli angoli mantengano la stessa entità.

Variazione angolare o scorrimento puro
(variazione di forma)

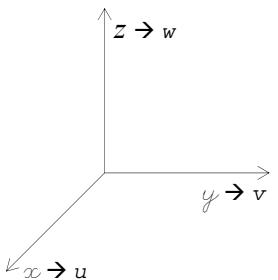


Con un angolo sufficientemente piccolo è possibile confondere la tangente dell'angolo con l'angolo stesso.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \approx \alpha_1 \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \approx \alpha_2$$

La deformazione è pari a $\rightarrow \Pi/2 - \theta = \alpha_1 + \alpha_2$, e quindi:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$



-esempio pratico-

$$\text{Ponendo che: } u = K * y$$

$$v = K * x$$

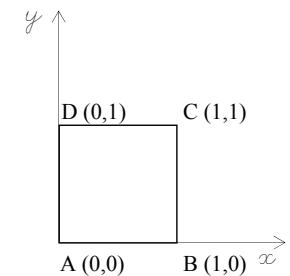
$$w = 0 \rightarrow (\text{caso piano})$$

$$\epsilon_x = \frac{(\partial u + \partial x) - \partial x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{(\partial v + \partial y) - \partial y}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \partial(K * x)/\partial x + \partial(K * y)/\partial y = 2K$$

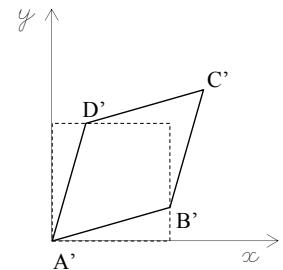


$$\begin{cases} u_A = K(x_A) = K*0 = 0 \\ v_A = K(y_A) = K*0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_B = K(x_B) = K*0 = 0 \\ v_B = K(y_B) = K*1 = K \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C = K(x_C) = K*1 = K \\ v_C = K(y_C) = K*1 = K \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_D = K(x_D) = K*1 = K \\ v_D = K(y_D) = K*0 = 0 \end{cases}$$



C.2

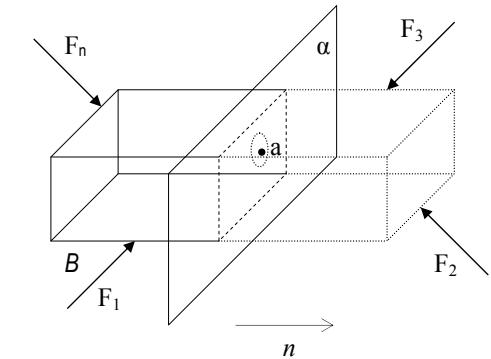
TEORIA DELLA TENSIONE

Le forze possono essere distinguibili per tipo e per forma.

- *forze di volume*: dipendono dalla gravità → es. il peso proprio della struttura.
- *forze di superficie*: esercitate dall'ambiente sulla struttura → es. l'azione del vento su di una parete.

Dimensionalmente, la *tensione* è data da: $\frac{\text{Forza}}{\text{Area}} \quad \frac{[\text{Newton}]}{[\text{mm}^2]}$

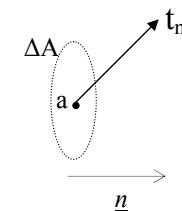
Si consideri ad esempio un elemento *B* soggetto ad un sistema *n* di forze *F* in equilibrio. Tagliando il medesimo con un piano di normale α ed eliminandone la parte destra, si nota che la parte eliminata trasmetteva alla restante un insieme di azioni, che saranno ora oggetto di analisi.



Sia preso un punto *a* sulla sezione generata dal piano, ed il suo intorno ΔA .

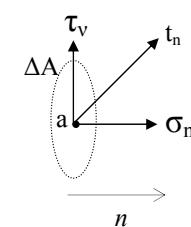
\underline{n} → direzione normale al piano di sezione;
 t_n → forza specifica secondo la direzione \underline{n} .

Per ΔA tendente a zero, t_n è il vettore *tensione*.



È possibile scomporre il vettore t_n secondo una *componente ortogonale* σ ed una *componente tangenziale* τ , sempre rispetto al piano α .

σ_n → tensioni normali alla superficie.
 τ_v → tensioni tangenziali alla superficie.



Il vettore t_n dipenderà dal punto in cui si opera la sezione, dalle forze agenti considerate, dall'inclinazione del piano di sezione e dalla direzione normale \underline{n} .

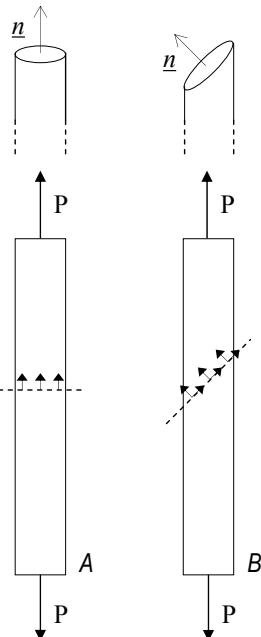
$$t_n = (x, \underline{n})$$

→ a parità di azioni esterne, nella situazione A si hanno solamente componenti normali alla sezione, nella B sia tangenziali che normali.

Quindi:

$$t_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{R}{A} \right)$$

→ limite di una generica risultante R e di una generica area A .



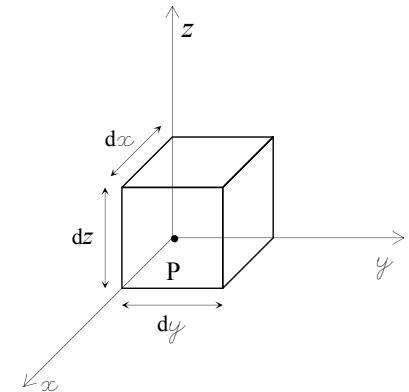
$$t_n = (x, \underline{n})$$

→ componente allineata con \underline{n}
 → componente tangenziale

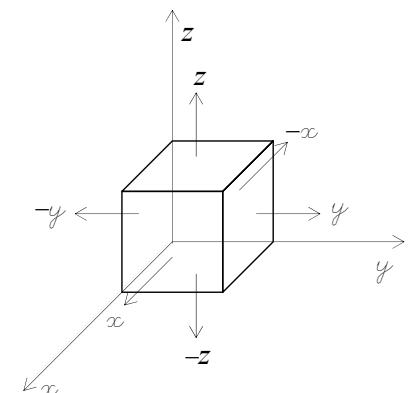
Teorema di Cauchy.

Considerando l'intorno del punto P

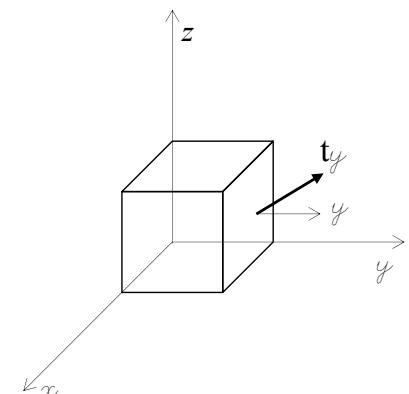
$$dx * dy * dz \rightarrow$$



I piani dell'intorno del punto sono individuati dalle perpendicolari al sistema di riferimento ortogonale x, y, z .

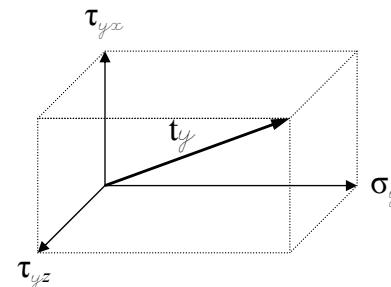


Considerando solamente la tensione in y , il vettore t_y viene scomposto secondo la componente ortogonale σ_y e le componenti tangenti τ_{yx} e τ_{yz} .



In pratica si scomponete un vettore nello spazio $\rightarrow t_y$ è la diagonale di un parallelepipedo.

Il primo pedice (y) è l'identificativo della direzione normale al piano, il secondo (z) della direzione del vettore.

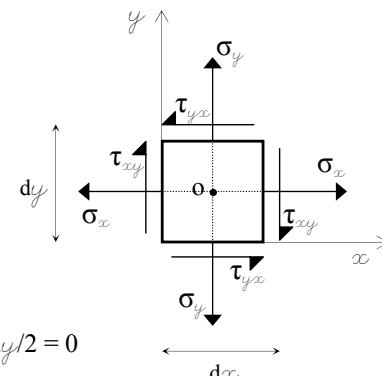


Ponendo in forma matriciale il tutto, si forma un tensore, ovvero una tabella ordinata i cui componenti sono vettori.

A questo punto è necessario trovare un modo di ridurre il numero di incognite in gioco.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = t_n$$

Considerando la faccia superiore del cubo di dimensioni $dx * dy * dz$ (ovvero il piano xy), scrivere le tensioni associate ad essa e calcolare un equilibrio alla rotazione in o .



$$\Sigma Mo = 0$$

$$M - \tau_{xy} * dx/2 - \tau_{xy} * dx/2 + \tau_{yx} * dy/2 + \tau_{yx} * dy/2 = 0$$

$$\rightarrow M - \tau_{xy} * dx + \tau_{yx} * dy = 0$$

Considerando il fatto che dx e dy sono uguali, essendo le dimensioni infinitesime del cubo, le due tensioni sono uguali.

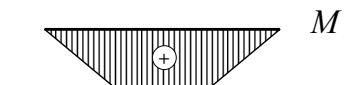
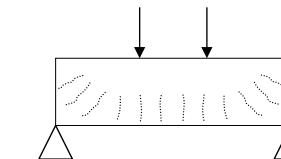
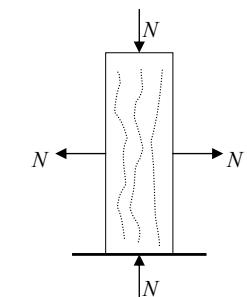
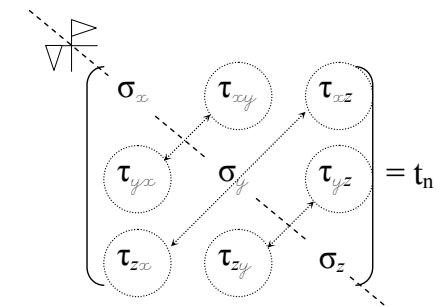
$$\rightarrow -\tau_{xy} + \tau_{yx} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Questo passaggio prende il nome di *teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali*, e permette di lavorare con un modello di calcolo semplificato. espresso in forma matriciale:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} \end{aligned}$$

\rightarrow le incognite si riducono da nove a sei. N.b. l'eguaglianza si verifica per il *modulo* delle tensioni; le direzioni restano comunque diverse \rightarrow i piani in cui giacciono le tensioni tangenziali eguali sono infatti perpendicolari.

Tutto ciò è utile per individuare un piano sulla cui ortogonale si verifichino solo trazione e compressione. \rightarrow nella realtà, le lesioni si formano ortogonalmente alla direzione di trazione; in questo caso, le azioni tangenziali sono tutte pari a zero. \rightarrow l'obiettivo finale è la ricerca delle direzioni principali di trazione e compressione.



Studiando ad esempio il piano fessurativo di una trave, si nota che la fessura si inclina ortogonalmente ai piani principali, dove si verifica solo trazione e compressione.

Da notare che il taglio è legato ad azioni di tipo tangenziale τ , mentre il momento è legato alle azioni normali σ .

\rightarrow l'andamento del quadro fessurativo è legato l'inclinazione dei piani principali, ed il taglio esiste nei tratti di fessura inclinata dove si verificano azioni tangenziali.

L'obiettivo finale è arrivare alla condizione in cui non si verificano azioni tangenziali.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \sigma_y & \tau_{yz} & \\ [simm.] & \sigma_z & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ \sigma_{II} & 0 & \\ [simm.] & \sigma_{III} & \end{pmatrix}$$

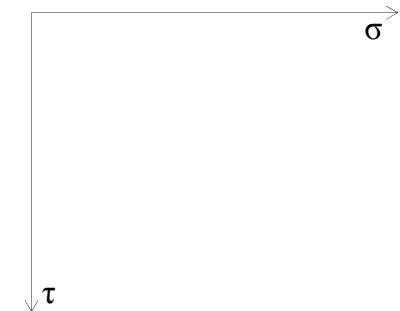
Al fine di ottenere questo risultato, è utile la trattazione del paragrafo successivo sul *cerchio di Mohr*, ovvero una modalità di rappresentazione grafica dello stato tensionale di un punto.

Cerchio di Mohr.

Tale costruzione geometrica serve a *descrivere graficamente lo stato tensionale di un punto*.

Si inizia ponendo un *sistema* che abbia in *ascissa* le tensioni normali σ , ed in *ordinata* le tensioni tangenziali τ .

Successivamente verrà tracciato un cerchio che, al variare dell'angolo, restituirà valori σ e τ per un piano di normale n .



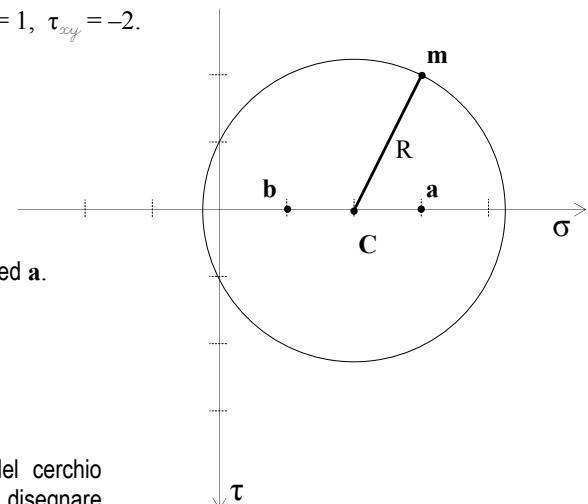
a. disegnare tre punti.

- $\mathbf{a} = (\sigma_x, 0) \rightarrow$ tensione sul piano di normale x ;
- $\mathbf{b} = (\sigma_y, 0) \rightarrow$ tensione sul piano di normale y ;
- $\mathbf{m} = (\sigma_x, \tau_{xy})$ punto chiamato *polo della rappresentazione*.

porre ad esempio $\sigma_x = 3$, $\sigma_y = 1$, $\tau_{xy} = -2$.

b. trovare il centro \mathbf{C} fra \mathbf{b} ed \mathbf{a} .

$$\rightarrow (\sigma_x - \sigma_y)/2 = \mathbf{C}$$



c. tracciare il raggio R del cerchio pari al segmento \underline{Cm} , e disegnare la circonferenza.

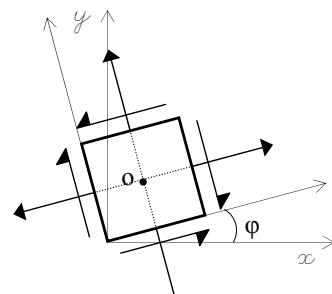
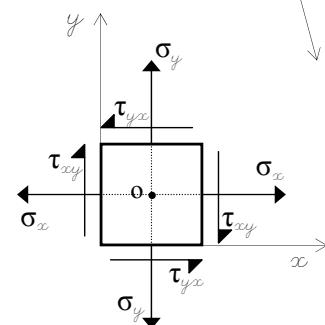
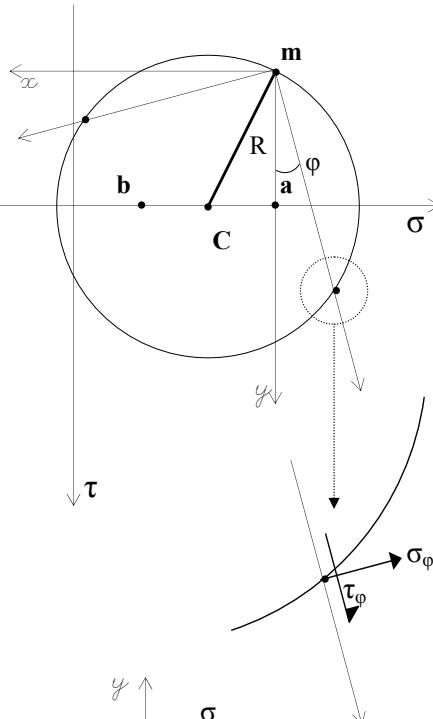
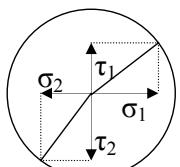
d. da notare che il punto **m** rappresenta il piano xy ruotato.

Se, per ipotesi, si intendesse conoscere lo stato tensionale di un generico piano φ , è sufficiente porre un piano ruotato sul piano di partenza xy .

e. nelle intersezioni fra il cerchio ed il piano φ si ottengono nuovi valori tensionali relativi al piano in questione. \rightarrow il cerchio di Mohr è una costruzione geometrica per scoprire coppie di valori σ_n e τ_n per piani qualsiasi.

Si nota che, per passare dal piano xy al piano φ , l'intorno del punto ha subito una rotazione di angolo φ (vedi anche p. 82).

La circonferenza ha raggio invariabile, e quindi le combinazioni di σ_n e τ_n non variano \rightarrow le somme vettoriali, e cioè il raggio, resta uguale.

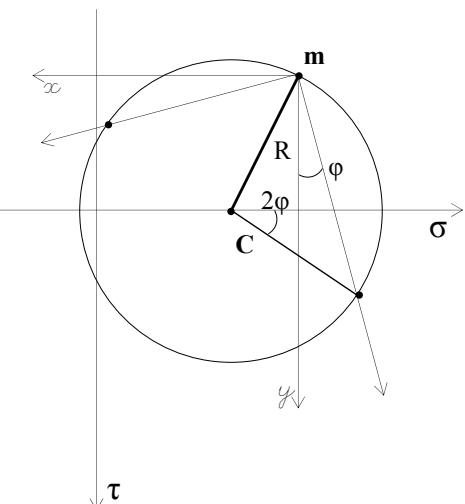
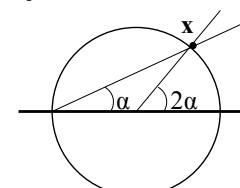


$$R = \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + \tau_{xy}^2}$$

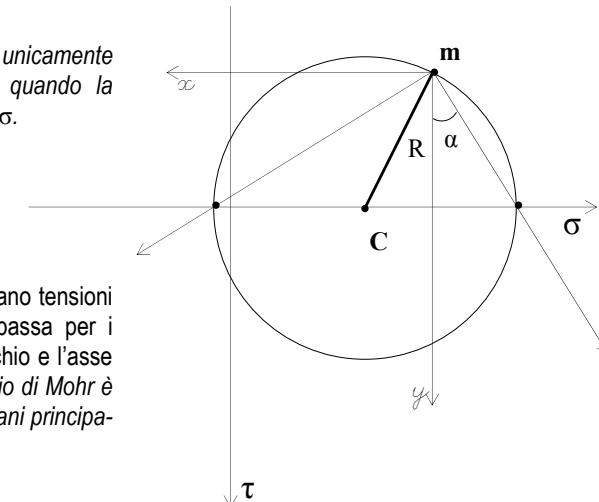
$$\sigma_\varphi = R (1 + \cos(2\varphi))$$

$$\tau_\varphi = R \sin(2\varphi)$$

N.b. 2φ è un *angolo al centro*, mentre φ è un *angolo alla circonferenza*. Per costruzione geometrica, un angolo al centro è sempre due volte un angolo alla circonferenza.



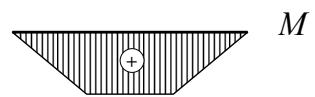
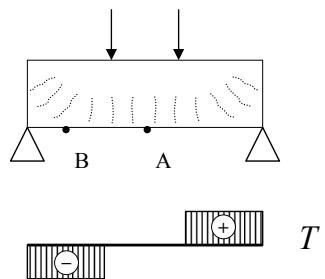
Da notare che si avranno *unicamente tensioni di tipo normale* σ_n quando la circonferenza interseca l'asse σ .



\rightarrow il piano dove non si verificano tensioni tangenziali τ_n è quello che passa per i punti di intersezione fra il cerchio e l'asse σ . \rightarrow la costruzione del cerchio di Mohr è utile per l'individuazione dei piani principali di sezione di una trave.

-esempio pratico-

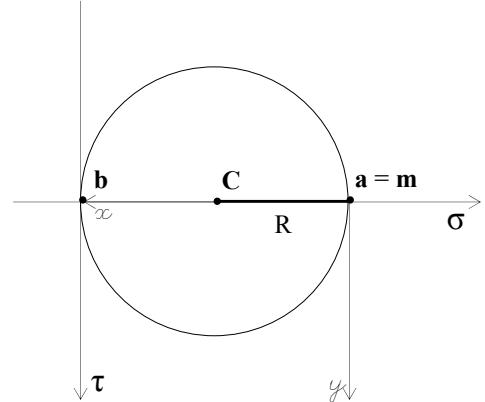
Riprendendo l'esempio del precedente paragrafo, è possibile analizzare lo stato tensionale del sistema nei punti A e B mediante il cerchio di Mohr.



punto A \rightarrow presenza solo di sforzo normale di trazione. La compressione è nulla.

$$\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$$

\rightarrow stato monoassiale \rightarrow solo una componente.



punto B \rightarrow il piano comincia a ruotare.

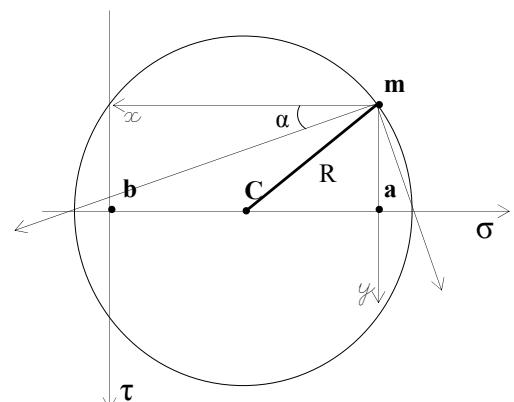
$$\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} \neq 0$$

\rightarrow stato pluriassiale \rightarrow da due a tre componenti.

σ_I = sigma massima (max. trazione)

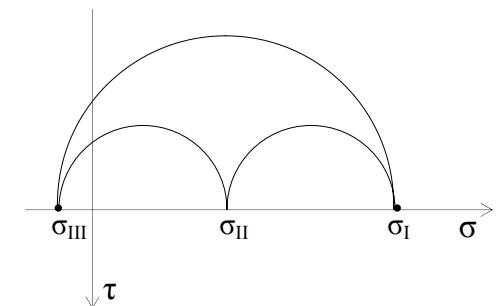
σ_{II} = sigma media

σ_{III} = sigma minima (max. compressione)

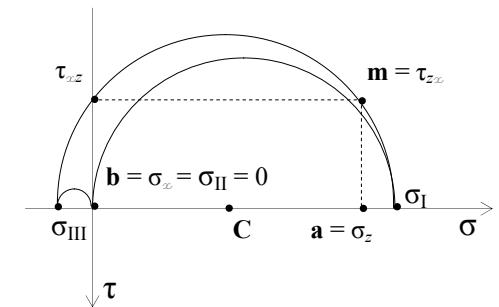


_Stati tensionali notevoli.

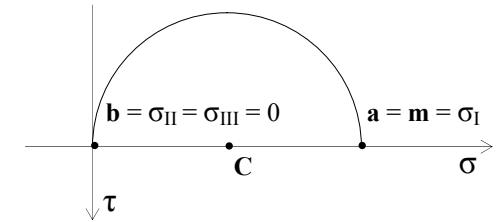
Stato triassiale.



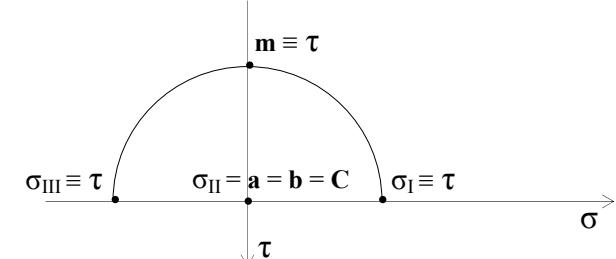
Stato biassiale.



Stato monoassiale.



Taglio puro
(particolare stato biassiale).

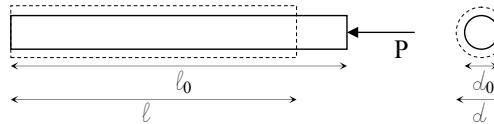


C.3

MATERIALI

Leggi costitutive dei materiali.

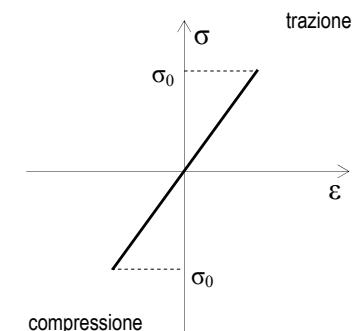
Prendere, ad esempio, una barretta di materiale qualsiasi a sezione circolare, sollecitandola con un'azione di compressione P ; l'effetto dell'azione produce una deformazione.



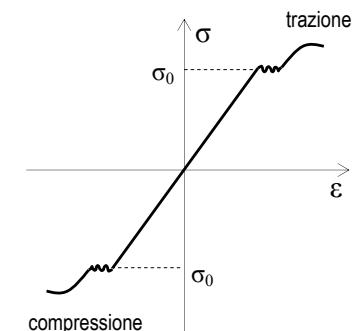
$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = -\frac{\Delta l}{l_0} = \text{deformazione longitudinale.}$$

$$\epsilon_t = \frac{d - d_0}{d_0} = -\frac{\Delta d}{d_0} = \text{deformazione trasversale.}$$

Se nel diagramma costitutivo σ - ϵ , giunto al valore σ_0 , il materiale raggiunge il suo limite di resistenza viene detto *elasto-fragile*. Esistono materiali che presentano lo stesso limite a trazione ed a compressione (vetro), ed altri che presentano valori diversi (calcestruzzo).

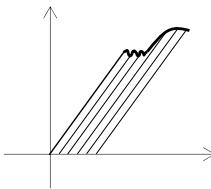
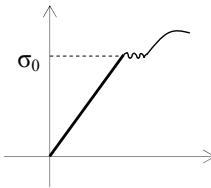


Se superato il valore limite il materiale accetta ancora sollecitazioni si parla di *materiale duttile*, con grande capacità di adattarsi alle deformazioni. Solitamente i materiali duttili resistono in ugual modo sia a trazione che a compressione (acciaio).



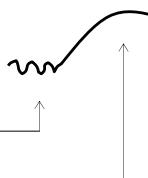
Il primo tratto del diagramma costitutivo è lineare (sino al valore σ_0); in questo caso si parla di campo *lineare elastico*, ovvero il legame σ - ε è rappresentato da una retta. Le deformazioni in campo lineare elastico sono *reversibili*.

Superato il valore limite σ_0 , il materiale accetta ancora tensioni (la legge costitutiva non è più lineare), ma le corrispondenti deformazioni *non sono più reversibili* → *campo plastico*, lo scarico avviene secondo una retta parallela a quella del campo elastico, spostata → il materiale non può più tornare alla condizione iniziale.

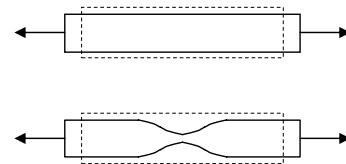


Ad esempio, il campo plastico dell'acciaio si divide in:

- *snervamento*: auto-bloccaggio casuale e disordinato a livello molecolare.
- *incrudimento* (hardening): il materiale può ancora assorbire tensioni, ma modifica la sua struttura sempre di più, finché collassa.



deformazione in campo elastico. →

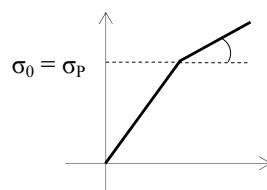
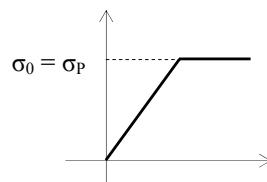


si verifica una *strizione* → una sezione si contrae più delle altre; avviene circa a metà del campo plastico. Il punto centrale della strizione è il punto dove si verificherà la rottura.

Schematizzazioni.

modelli elastico – perfettamente plastici

→ non si considera che il materiale assorbe tensioni raggiunto il valore σ_0 , ma si deforma solamente fino alla rottura.



elastico – plastici con incrudimento

→ si tiene conto del fatto che il materiale, anche se in campo plastico, può assorbire ancora di tensioni.

Rapporti fra tensioni e deformazioni.

In campo lineare elastico, le deformazioni avvengono in base a:

E , modulo di Young → $\sigma = E \cdot \varepsilon$; esiste un E per ogni materiale.
 σ ed E si misurano in N/mm^2 , mentre la deformazione ε è un numero.

ν , modulo di Poisson → $\varepsilon_t = \nu \cdot \varepsilon$; ν è il coefficiente di contrazione trasversale.
 ε_t , ν ed ε sono numeri.

σ_x	→	ε_x
σ_y	→	ε_y
σ_z	→	ε_z
$\tau_{xy} = \tau_{yx}$	→	$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$
$\tau_{zx} = \tau_{xz}$	→	$\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$
$\tau_{zy} = \tau_{yz}$	→	$\gamma_{zy} = \gamma_{yz}$

→ Partendo dalle deformazioni longitudinali, bisogna legarle alle trasversali, ottenendo una matrice a trentasei caselle.

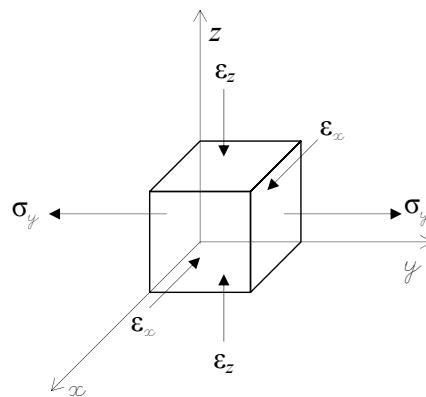
- Se la matrice è piena, il materiale è detto *anisotropo*, ovvero ha un comportamento diverso per ogni direzione.
- Se il materiale ha delle direzioni privilegiate di utilizzo è detto *ortotropo*; ad esempio il legno, dà prestazioni differenti se utilizzato parallelamente o perpendicolarmente alle fibre; occupa diciotto termini della matrice. Anche la muratura è associabile ad un materiale ortotropo, ma più problematico: è disomogenea, e campionando in più punti si ottengono risultati diversi.
- Se il materiale si comporta nello stesso modo in tutte le direzioni è detto *isotropo*; esempio calzante è l'acciaio. Anche il calcestruzzo e la ghiaia sono statisticamente materiali isotropi.

Tensioni e deformazioni in materiali isotropi.

Prendere ad esempio un provino cubico di materiale isotropo.

Applicando uno sforzo normale di trazione secondo y , si nota che il materiale si allunga secondo y e si comprime nelle altre due direzioni.

$$\sigma_y = E \varepsilon_y \rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$



ε_z ed ε_x sono le deformazioni trasversali, legate ad ε_y tramite il coefficiente di Poisson, ν .

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu * \varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_y}{E}$$

→ i materiali isotropi riempiono tre termini della suddetta matrice: una deformazione longitudinale (un modulo di Young) e due deformazioni trasversali (due coefficienti di Poisson).

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} ; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu * \varepsilon_x = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

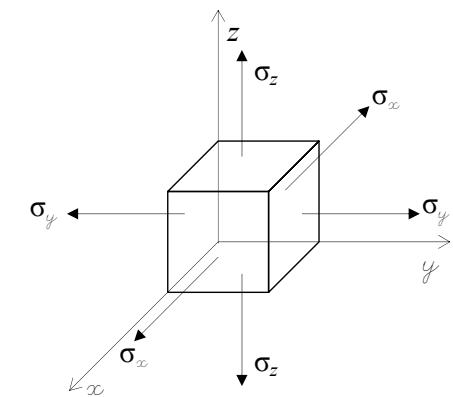
$$\sigma_z = E \varepsilon_z \rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} ; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu * \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_z}{E}$$

Tirando da tutte le facce del provino:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E}$$



Per legare le tensioni tangenziali taglienti alle deformazioni trasversali esiste una costante di taglio G , misurata in N/mm².

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$$

$$\tau_{zy} = G \gamma_{zy}$$

Per materiali isotropi, G vale:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

→ un materiale isotropo è legato a due costanti: G ed E , E e ν , ν e G .

- $E > 0 \rightarrow$ è sempre positivo, poiché non è possibile che un materiale tirato si accorci.
- $G > 0 \rightarrow$ idem.
- $-1 < \nu < 0,5$ anche se per materiali strutturali è compresa fra 0 e 0,5 → i materiali strutturali non si dilatano trasversalmente quando vengono sottoposti a trazione.

Riassumendo:

$$\varepsilon \xrightarrow{1/E; -v/E} \sigma$$

$$\sigma \xrightarrow{E; v} \varepsilon$$

$$\gamma \xrightarrow{1/G} \tau$$

$$\tau \xrightarrow{G} \gamma$$

\mathbb{A}	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{zy}
ε_x	$1/E$	$-v/E$	$-v/E$	0	0	0
ε_y	$-v/E$	$1/E$	$-v/E$	0	0	0
ε_z	$-v/E$	$-v/E$	$1/E$	0	0	0
γ_{xy}	0	0	0	$1/G$	0	0
γ_{xz}	0	0	0	0	$1/G$	0
γ_{zy}	0	0	0	0	0	$1/G$

→ le γ sono collegate solo alle τ con pedice uguale tramite $1/G$;

→ le ε sono collegate alle σ con pedice uguale tramite $1/E$;

→ le ε sono collegate alle σ con pedice diverso tramite $-v/E$.

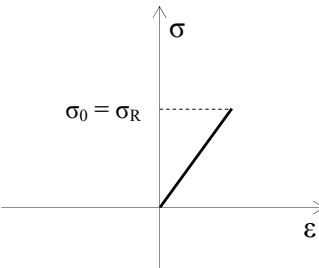
Tale matrice esprime le coordinate del vettore deformazioni \underline{e} e del vettore tensioni $\underline{\tau}$, e viene indicata con la lettera \mathbb{A} per semplicità → noto uno stato, tensionale o deformativo, si ottiene l'altro.

$$\underline{\tau} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} \end{array} \right. \quad \underline{e} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} = \gamma_{yz} \end{array} \right.$$

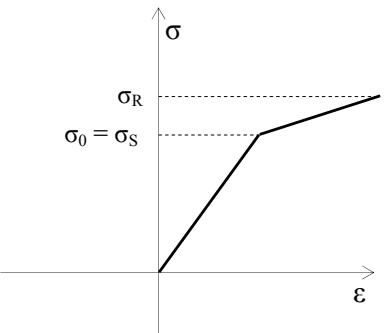
$$\underline{e} = \mathbb{A} \underline{\tau}$$

$$\underline{\tau} = \mathbb{A}^{-1} \underline{e} \quad (\text{l'apice -1 indica l'inverso della matrice di partenza})$$

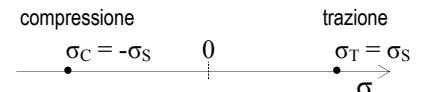
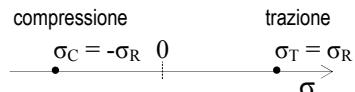
Criteri di resistenza dei materiali.



materiali fragili → la tensione σ_0 coincide con la σ_R di rottura.



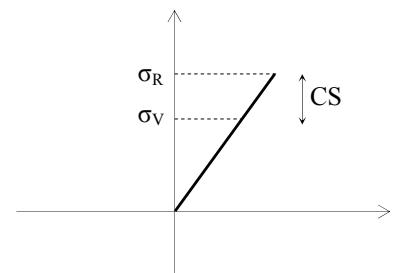
materiali duttili → la tensione σ_0 coincide con la tensione di sforzamento σ_S .



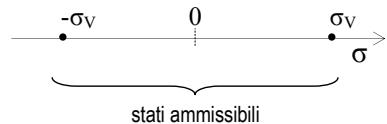
Si introduce dunque il concetto di *grandezza indice del pericolo* (G.I.P.):

- Nei materiali fragili la G.I.P. è solamente una tensione di valore normale, di tipo σ ; le τ non influiscono.
- Nei materiali duttili la G.I.P. è determinata da tutte le tensioni, sia σ che τ .

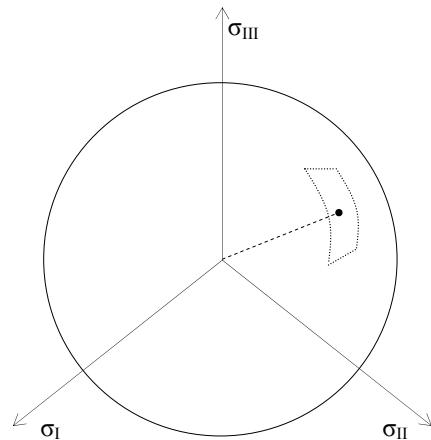
Ovviamente le strutture vanno verificate con una σ_V che tenga conto di un *coefficiente di sicurezza* CS .



Si individua a questo punto un *dominio degli stati ammissibili*, entro il quale verificare una struttura.



Portando in tre dimensioni il tutto, si costruisce una sfera nello spazio delle tensioni principali σ_I, σ_{II}, σ_{III}, che raccolga il dominio degli stati ammissibili.



Modello di Galileo – Rankine.

Utilizzato per *materiali fragili*. È necessario verificare che le tre σ principali σ_I, σ_{II} e σ_{III} siano minori della σ_T di trazione e maggiori della σ_C di compressione.

$$G.I.P. = \{ \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} \} \leq \sigma_T$$

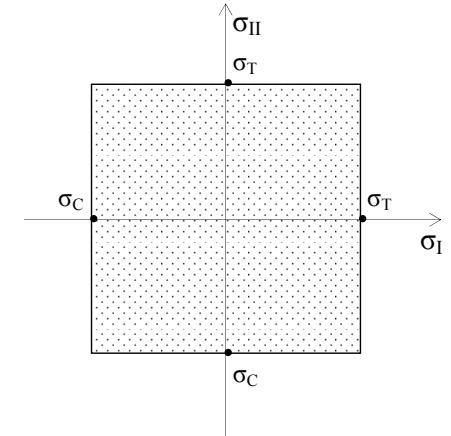
$$G.I.P. = \{ \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} \} \geq \sigma_C$$

-esempio pratico-

Parete, oggetto bidimensionale.

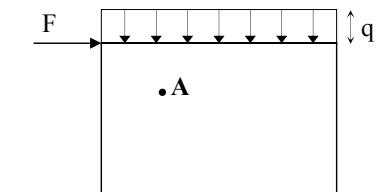
$$\rightarrow \sigma_I \neq 0, \sigma_{II} \neq 0, \sigma_{III} = 0.$$

→ il dominio è compreso fra le σ massime di compressione e trazione per σ_I e σ_{II}.

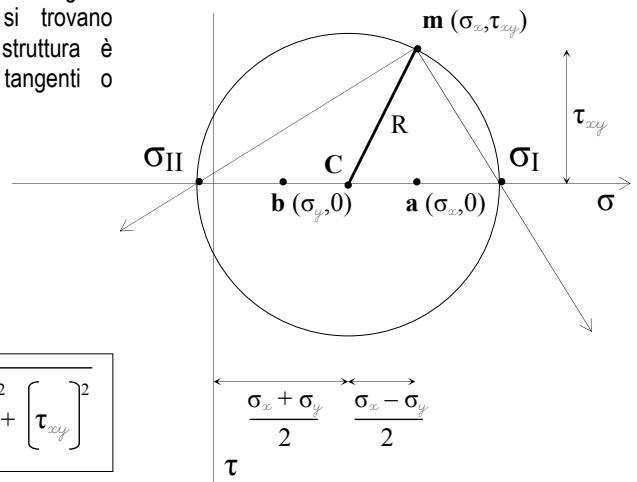


Dopo aver disegnato un modello della struttura e dei carichi agenti, si passa a campionare un punto A qualsiasi, che sarà definito, come noto, da:

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}.$$



Mediante il *cerchio di Mohr* vengono analizzate σ_I e σ_{II}; se si trovano all'interno del dominio la struttura è verificata, al contrario se tangenti o esterne al dominio.



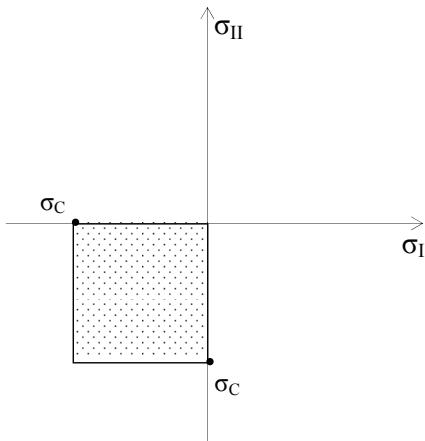
$$\rightarrow \sigma_I, \sigma_{II} = C \pm R$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xy}\right)^2}$$

Calcestruzzo.

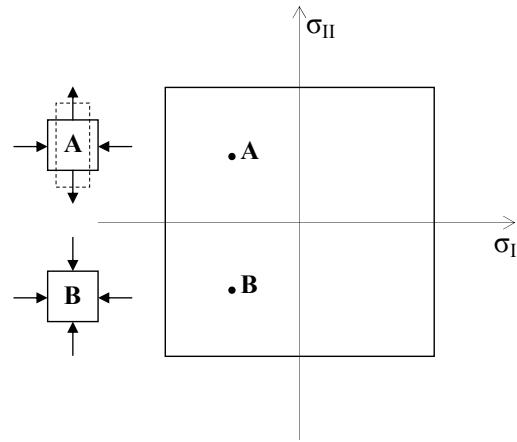
Viene verificato solamente a σ_C di compressione.
 σ_T di trazione = 0.

In pratica, viene ristretto il campo di dominio.



N.b. nei provini:

Il provino A, a causa degli sforzi applicati, si deforma molto più facilmente del B.
 La condizione B è più sicura → ecco perché molto spesso i pilastri vengono ingabbiati: per contrastare lo spaccamento.



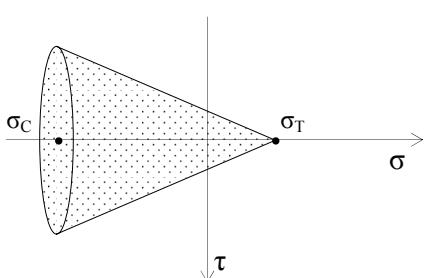
Criterio di Coulomb.

Viene utilizzato per *murature*, e descrive crisi per decoesione e scivolamento dei piani. Si usa il piano di Mohr (σ, τ).
 σ_T in questo caso è la massima trazione sostenibile per il materiale.

Ne risulta un dominio a forma di cono.

$$|\tau| = c - \mu\sigma$$

leggasi: valore assoluto di τ = coesione (c) – coefficiente di attrito (μ) per σ .

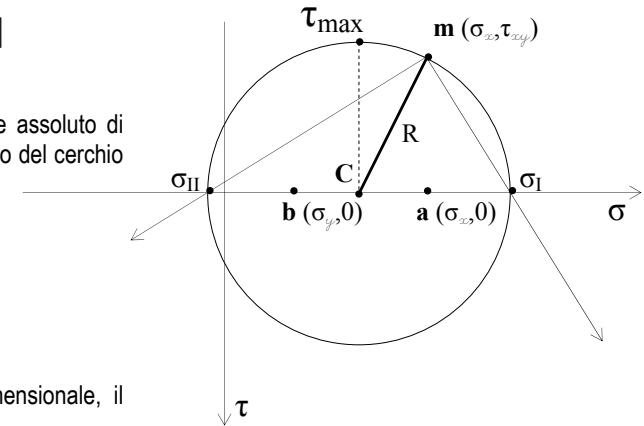


Criterio di Tresca.

Utilizzato per *materiali duttili*. Le G.I.P. sono le tensioni tangenziali τ , ed in particolare la τ_{\max} .

$$\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right| = |R|$$

leggasi: τ_{\max} = valore assoluto di $\sigma_I - \sigma_{II}$ mezzi, e cioè il raggio del cerchio di Mohr in valore assoluto.



Quindi, per uno stato tridimensionale, il Tresca enuncia:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} * \max \{ (\sigma_I - \sigma_{II}); (\sigma_{II} - \sigma_{III}); (\sigma_{III} - \sigma_I) \}$$

→ verificare che la τ sia compresa entro le τ_{\max} a trazione e compressione.

$$\sigma_C \leq \sigma_I - \sigma_{II} \leq \sigma_T$$

$$\sigma_C \leq \sigma_{II} - \sigma_{III} \leq \sigma_T$$

$$\sigma_C \leq \sigma_{III} - \sigma_I \leq \sigma_T$$

Negli angoli superiore sinistro ed inferiore destro lo snervamento del materiale deve già essere avvenuto.

Quindi il Tresca formula un grafico sostitutivo al modello di Galileo-Rankine →

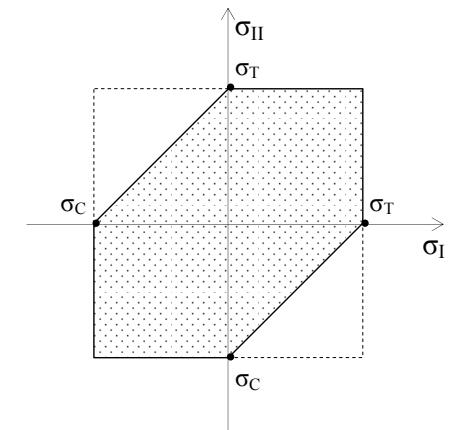
In oggetti bidimensionali (assenza di σ_{III}):

$$\sigma_C \leq \sigma_I - \sigma_{II} \leq \sigma_T$$

→ definisce una retta compresa fra σ_C e σ_T .

$$\sigma_C \leq \sigma_{II} \leq \sigma_T$$

$$\sigma_C \leq \sigma_I \leq \sigma_T$$



Si ottiene il cosiddetto esagono di Tresca, identificativo delle τ_{\max} del materiale.

TEORIE DI DE SAINT-VENANT

D

D.1

TRAVE DI DE SAINT-VENANT



Il modello si compone di alcuni punti cardine:

a. modello geometrico:

- $a \ll l$
- $b \ll l$

“ \ll ” sta per “molto più piccola di”.

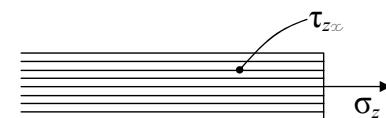
b. modello meccanico:

- lineare elastico
- omogeneo
- isotropo

La trave è pensabile come formata da un insieme di fibre (ad esempio un pacco di spaghetti).

I campi diversi da zero sono:

$$\sigma_z \neq 0; \quad \tau_{zx} \neq 0; \quad \tau_{zy} \neq 0.$$



→ il tutto avviene in campo lineare elastico, quindi è possibile utilizzare la sovrapposizione degli effetti.

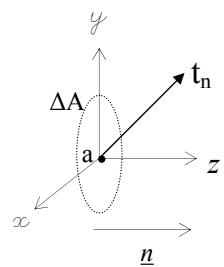
TRAVE DI DE SAINT-VENANT

Casi descritti in trave di De Saint Venant.

$$N_z = \int_A \sigma_z \, dA$$

$$T_y = \int_A \tau_{zy} \, dA$$

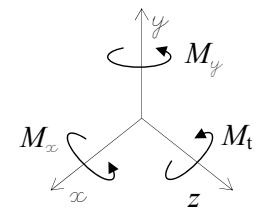
$$T_x = \int_A \tau_{zx} \, dA$$



$$M_x = \int_A \sigma_z * y \, dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_z * x \, dA$$

$$M_t = \int_A (-\tau_{zy} * x + \tau_{zx} * y) \, dA$$

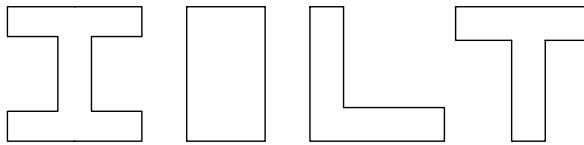


→ parametri di sollecitazione per la sezione di normale z .

D.2

CENNI DI GEOMETRIA DELLE AREE

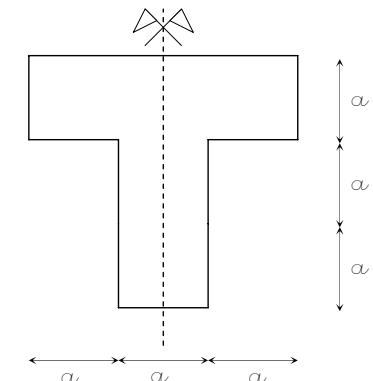
È necessario, in una trave, conoscere il baricentro della sezione, ovvero il punto dove si collocano le informazioni studiate, in forma schematica, nel calcolo strutturale.



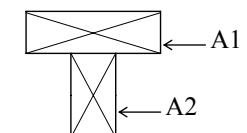
Individuazione del baricentro di una figura.

Esempio: trave con sezione a T.

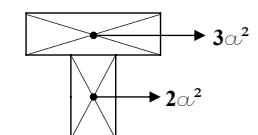
→ ogni sezione in cui si individua un asse di simmetria possiede il baricentro lungo tale asse.



a. scomporre la figura in parti, delle quali è possibile conoscere senza problemi il baricentro → scomposizione in rettangoli.



b. disegnare dei vettori rappresentanti ogni area, individuata nei baricentri delle medesime.



La seconda coordinata del *baricentro globale* è la risultante dei due vettori, dove il momento è zero. → la risultante è all'interno dei due vettori, purché essi siano di verso concorde.

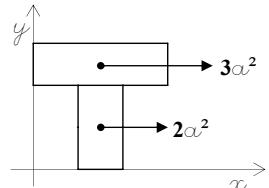
c. calcolare il momento dei due vettori rispetto ad un asse scelto opportunamente.

$$3a^2*(5a/2 - y) + 2a^2*(a - y) = 0$$

N.b. la y che compare nell'equazione serve ad applicare un'incognita alla stessa.

$$\rightarrow 15a^3/2 - 3a^2y + 2a^3 - 2a^2y = 0$$

$$\rightarrow 19a^3/2 - 5a^2y = 0 \rightarrow y = \frac{19a^3}{2*5a^2}$$



Scrivendo sotto forma di formula il tutto:

$$y_g \text{ (coordinata } y \text{ baricentro)} = \frac{S_x}{A}$$

$$x_g \text{ (coordinata } x \text{ baricentro)} = \frac{S_y}{A}$$

In generale:

$$S_{xi} = A_i * y_i$$

$$S_{yi} = A_i * x_i$$

con:

A_i = area totale i -esima della sezione,

S_i = momento statico i -esimo della sezione.

Il *momento statico* è il rapporto fra un'area ed una lunghezza, è una grandezza espressa al cubo. Può essere nullo (nell'asse baricentrico) negativo, positivo.

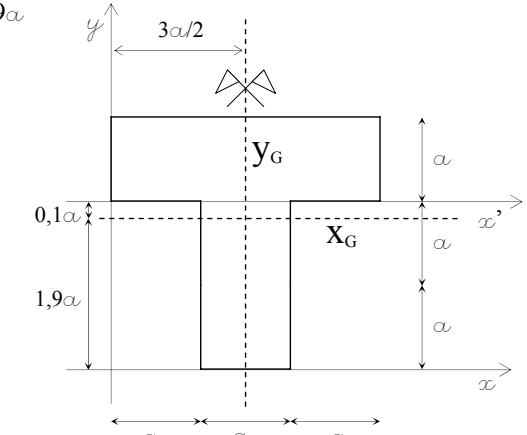
d. redigere una tabella con aree, lunghezze e momenti statici.

	A_i	y_i	x_i	S_{xi}	S_{yi}
A1	$3a^2$	$5a/2$	$3a/2$	$15a^3/2$	$9a^3/2$
+					
A2	$2a^2$	a	$3a/2$	$2a^3$	$3a^3$
totali	$5a^2$			$19a^3/2$	$15a^3/2$

$$y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{19a^3}{2} \cdot \frac{1}{5a^3} = 19a/10 = 1,9a$$

$$x_g = \frac{S_y}{A} = \frac{15a^3}{2} \cdot \frac{1}{5a^3} = 3a/2$$

Ovviamente, prendendo in considerazione un altro asse x' , il risultato non cambia → il valore rispetto al nuovo asse è diverso, ma la posizione di x_g rimane invariata.



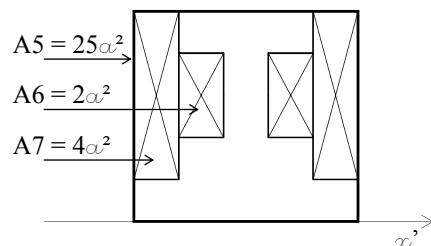
	A_i	y_i	$S_{x'i}$
A1	$3a^2$	$a/2$	$3a^3/2$
+			
A2	$2a^2$	$-a$	$-2a^3$
totali	$5a^2$		$-a^3/2$

$$y_g = \frac{S_{x'}}{A} = - \frac{a^3}{2} \cdot \frac{1}{5a^3} = a/10 = 0,1a$$

$0,1a + 1,9a = 2a$ (distanza fra i due assi x ed x' c.v.d.)

Esercizio n.27

La tab_A si riferisce alla consueta soluzione per scomposizione (a destra), mentre la tab_B analizza una soluzione alternativa per sottrazione di aree (in basso) tenendo conto dell'asse x' .

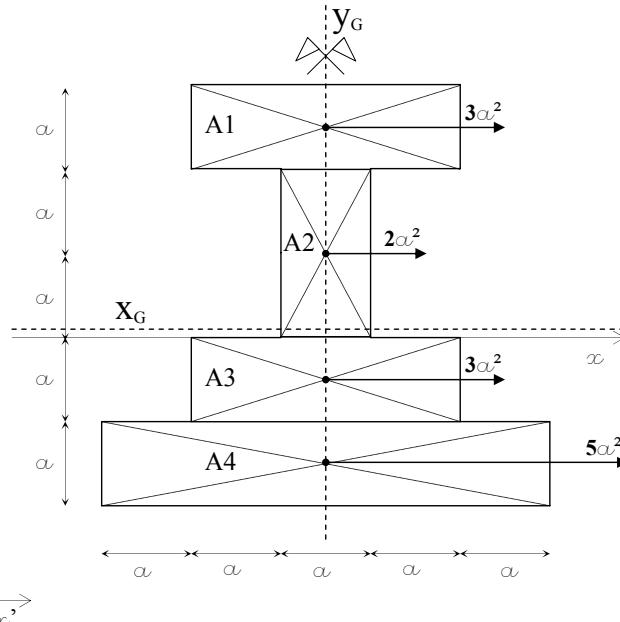


tab_A	A_i	y_i	S_{xi}
A1	$3a^2$	$5a/2$	$15a^3/2$
+			
A2	$2a^2$	a	$2a^3$
+			
A3	$3a^2$	$-a/2$	$-3a^3/2$
+			
A4	$5a^2$	$-3a/2$	$-15a^3/2$
totali	$13a^2$		$a^3/2$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{a^3}{2} \frac{1}{13a^3} = a/26 = 0,04a$$

$$y_G' = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{53a^3}{2} \frac{1}{13a^3} = 53a/26 = 2,04a$$

$$2,04a + (-0,04a) = 2a \text{ (distanza fra i due assi } x \text{ ed } x' \text{ c.v.d.)}$$



tab_B	A_i	y_i	S_{xi}
A5	$25a^2$	$5a/2$	$125a^3/2$
-			
A6	$2*2a^2$	$3a$	$12a^3$
-			
A7	$2*4a^2$	$3a$	$24a^3$
+			
totali	$13a^2$		$53a^3/2$

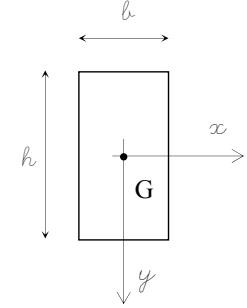
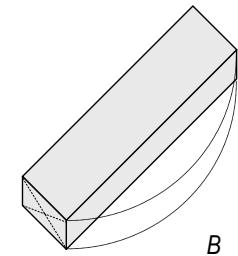
Il momento di inerzia.

Il momento statico delle travi A e B è uguale, ma le medesime si inflettono in modo diverso, offrendo una diversa resistenza alla flessione \rightarrow è possibile studiare questa caratteristica con il *momento di inerzia*, ovvero la capacità della trave di opporsi alla rotazione.

in queste pagine verrà affrontato solamente il *momento di inerzia assiale*.

$$I_{xi} \text{ (momento di inerzia assiale rispetto all'asse } x) = \sum_{i=1}^n A_i * y_i^2$$

$$I_{yi} \text{ (momento di inerzia assiale rispetto all'asse } y) = \sum_{i=1}^n A_i * x_i^2$$



N.b. Il momento di inerzia è il rapporto fra un'area ed una distanza al quadrato \rightarrow è una quantità sempre positiva.

Per assi baricentrici di sezioni rettangolari i momenti di inerzia sono pari a:

$$I_{xG} = \frac{bh^3}{12} \quad I_{yG} = \frac{b^3h}{12}$$

Per assi tangenti alle sezioni rettangolari i momenti di inerzia sono pari a:

$$I_{xi} = \frac{bh^3}{3} \quad I_{yi} = \frac{b^3h}{3}$$



$$I_{xG} = \frac{a*3a^3}{12} = \frac{9a^4}{4}$$

A. sezione con b di gran lunga minore di h

$$I_{xG} = \frac{3a*a^3}{12} = \frac{a^4}{4}$$

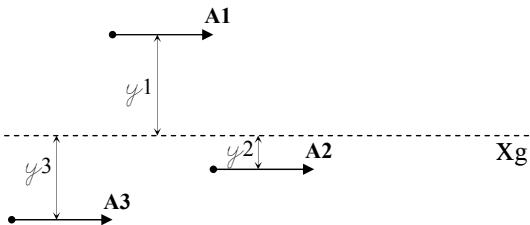
B. sezione con b di gran lunga maggiore di h

\rightarrow la sezione A è molto più resistente alla flessione della sezione B.

Teorema del trasporto.

Siano date tre aree A_1, A_2, A_3 espresse in forma di vettori, ed il loro asse baricentrico X_G .

$$I_{xG} = \sum_{i=1}^n A_i * y_i^2$$



Si applichi un piccolo incremento d alle distanze y , in modo da calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse qualsiasi e non all'asse baricentrico delle aree.

$$I_{xi} = \sum_{i=1}^n A_i * (y_i + d)^2$$

$$\rightarrow I_{xi} = \underbrace{\sum_{i=1}^n A_i * y_i^2}_{I_{xG}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n A_i * d^2}_{\text{momento statico}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (A_i * y_i) * d}_{\text{distanza rispetto ad un asse baricentrico} = 0}$$

il rapporto fra i due è zero.

$$\rightarrow I_{xi} = I_{xG} + \sum_{i=1}^n A_i * d^2$$

→ Il momento di inerzia assiale rispetto ad un asse qualsiasi è pari al momento di inerzia assiale baricentrico più l'area della figura.

→ il momento di inerzia assiale baricentrico è il momento più piccolo fra i possibili momenti di inerzia di una figura.

La formula enunciata poc'anzi prende il nome di *teorema del trasporto*, il quale permette di trovare il momento di inerzia di una figura rispetto ad un asse baricentrico ed un asse qualsiasi.

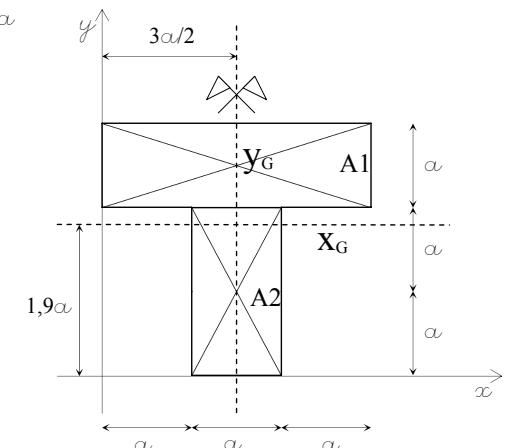
Modalità applicative del teorema del trasporto.

Riprendendo l'esempio precedente (sezione a T):

	A_i	y_i	x_i	S_{xi}	S_{yi}
A1	$3\alpha^2$	$5\alpha/2$	$3\alpha/2$	$15\alpha^3/2$	$9\alpha^3/2$
+					
A2	$2\alpha^2$	α	$3\alpha/2$	$2\alpha^3$	$3\alpha^3$
totali	$5\alpha^2$			$19\alpha^3/2$	$15\alpha^3/2$

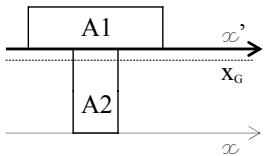
$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{19\alpha^3}{2} \frac{1}{5\alpha^2} = 19\alpha/10 = 1,9\alpha$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{15\alpha^3}{2} \frac{1}{5\alpha^2} = 3\alpha/2$$



Primo metodo: asse tangente

Non è possibile calcolare $I_{x'}$ né rispetto ad X_g né ad x , poiché non sono assi tangenti alle due aree. → si pone un nuovo asse x' , tangente ad entrambi i due rettangoli di scomposizione.



$$I_{x'} = I_{x'}(A1) + I_{x'}(A2)$$

$$I_{x'} = \frac{3\alpha^* \alpha^3}{3} + \frac{\alpha^* (2\alpha)^3}{3} = \frac{3\alpha^4 + 8\alpha^4}{3} = \frac{11\alpha^4}{3} = 3,67\alpha^4$$

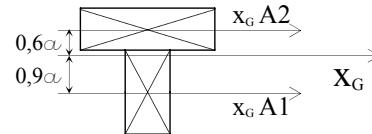
E quindi, applicando il teorema del trasporto:

$$I_{xg} = I_{x'} - A_i * (x' - Xg)^2 \rightarrow I_{xg} = 3,67\alpha^4 - 5\alpha^2 * (0,1\alpha)^2 = \boxed{3,62\alpha^4}$$

↑
distanza
fra gli assi

Secondo metodo: assi barcentrici delle singole aree

Se non è possibile trovare assi tangenti a tutte le aree, applicare il teorema del trasporto per gli assi baricentrici noti delle aree di scomposizione.



N.b. per le due aree, in questo caso, l'asse X_g è un asse qualsiasi → vanno sommati i momenti di inerzia di ogni area e le aree per le rispettive distanze dall'asse al quadrato.

$$\rightarrow I_{xg} (I_{xg}) = I_{xg_i} + \sum_{i=1}^n A_i * d^2$$

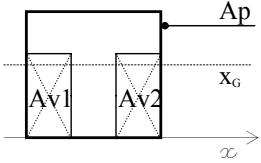
$$I_{xg} = I_{xg1}(A1) + A1 * (x_{g1} - Xg)^2 + I_{xg2}(A2) + A2 * (x_{g2} - Xg)^2$$

$$\rightarrow I_{xg} = \frac{3\alpha^* \alpha^3}{12} + 3\alpha^2 * (0,6\alpha)^2 + \frac{\alpha^* (2\alpha)^3}{12} + 2\alpha^2 * (0,9\alpha)^2$$

$$\rightarrow I_{xg} = 0,25\alpha^4 + 1,08\alpha^4 + 0,67\alpha^4 + 1,62\alpha^4 = \boxed{3,62\alpha^4} \text{ c.v.d.}$$

Terzo metodo: pieno meno vuoto

Analogo al primo metodo, con la differenza di considerare la figura inscritta in un rettangolo, e calcolare l'inerzia del pieno meno l'inerzia dei vuoti tangenti.



$$I_x = I_x(A_p) - I_x(Av1) - I_x(Av2)$$

$$I_x = \frac{3a^2(3a)^3}{3} - 2 \frac{a^2(2a)^3}{3} = \frac{81a^4 - 16a^4}{3} = 21,67a^4$$

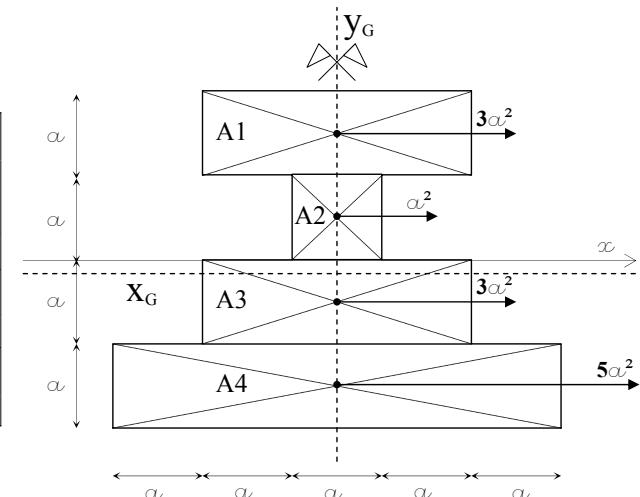
Applicando il consueto teorema del trasporto:

$$I_{xG} = I_x - A * (x - X_g)^2$$

$$\Rightarrow 21,67a^4 - 5a^2 * (1,9a)^2 = 21,67a^4 - 18,05a^4 = \boxed{3,62a^4} \text{ c.v.d.}$$

Esercizio n.28

	A_i	y_i	S_{xi}
A1	$3a^2$	$3a/2$	$9a^3/2$
+			
A2	a^2	$a/2$	$a^3/2$
+			
A3	$3a^2$	$-a/2$	$-3a^3/2$
+			
A4	$5a^2$	$-3a/2$	$-15a^3/2$
totali	$12a^2$		$-4a^3$



$$y_G = \frac{S_x}{A} = -4a^3 \frac{1}{12a^2} = -a/3 = -0,33a$$

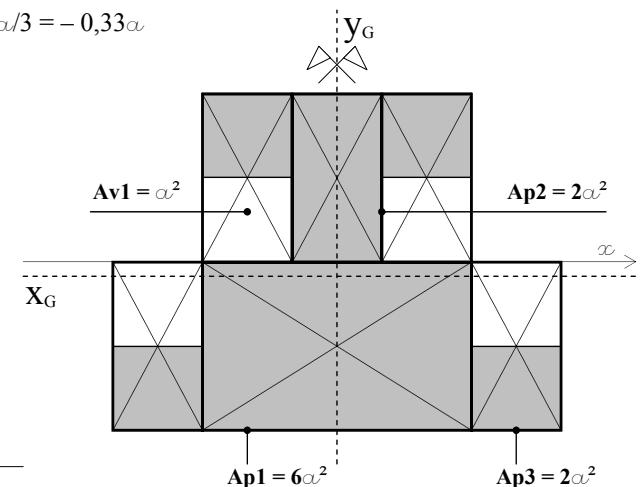
L'asse stabilito è utile anche nel calcolo del momento di inerzia, dal momento che può essere considerato tangente a tutte le aree \rightarrow

Il momento di inerzia delle aree piccole si ottiene per differenza fra il momento delle aree A_p3 e quello delle $Av1$; è possibile moltiplicare per quattro il momento trovato, in quanto le piccole aree sono tutte equidistanti dall'asse x .

$$I_x = \frac{3a^2(2a)^3}{3} + 4 \left[\frac{a^2(2a)^3}{3} - \frac{a^4}{3} \right] + \frac{a^2(2a)^3}{3}$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{24a^4}{3} + 4 \left[\frac{7a^4}{3} \right] + \frac{8a^4}{3} = \frac{60a^4}{3} = 20a^4$$

$$\Rightarrow I_{xG} = I_x - A_i * (x - X_g)^2 \Rightarrow I_{xG} = 20a^4 - 12a^2 * (0,33a)^2 = \boxed{18,69a^4}$$



D.3

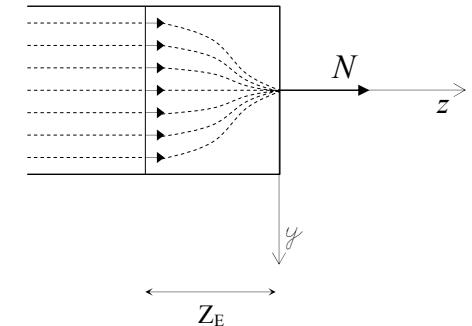
SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Sforzo normale in trave di De Saint-Venant.

Ipotizzando che la trave sia soggetta solo ad uno sforzo normale di trazione:

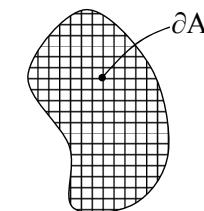
Z_E è la *zona di estinzione* → lo sforzo concentrato si distribuisce per la sezione.
È possibile rappresentare tale fenomeno mediante un integrale.

$$N = \int_A \sigma_z * \partial A$$



σ_z è costante, e quindi viene tratta fuori dal segno di integrale.

$$N = \sigma_z \int_A \partial A$$



L'integrale in A delle porzioni infinitesime ∂A è uguale alla area stessa.

$$\rightarrow A = \sum \partial A$$

Quindi, la tensione σ_z è uguale allo sforzo normale N fratto l'area A .

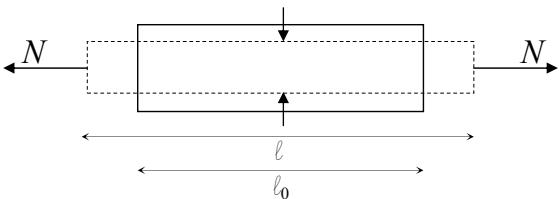
$$N = \sigma_z * A$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

Se il materiale è isotropo la trave si deforma secondo ε_x , ε_y , ε_z (vedi p.88).

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{v\sigma_x}{E} - \frac{v\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_z = 1/E (\sigma_z - v * (\sigma_x + \sigma_y))$$



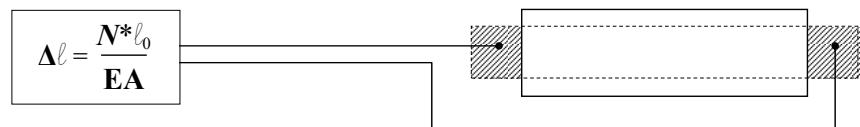
Dato che non si verificano tensioni trasversali σ_x e σ_y , ε_z è pari a:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA}$$

Quindi la deformazione della trave è:

- direttamente proporzionale allo sforzo N ;
- inversamente proporzionale al modulo elastico E ed all'area A della sezione.

EA è la *rigidezza assiale*.



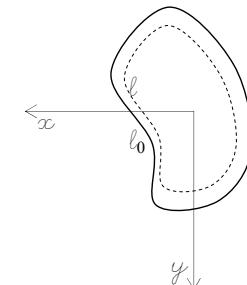
È ora possibile occuparsi dell'area della sezione, che si contrarrà secondo le deformazioni trasversali ε_x e ε_y .

$$\varepsilon_x = 1/E (\sigma_x - v * (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = 1/E (\sigma_y - v * (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_x = - \frac{v\sigma_z}{E} = - \frac{vN}{EA}$$

$$\varepsilon_y = - \frac{v\sigma_z}{E} = - \frac{vN}{EA}$$

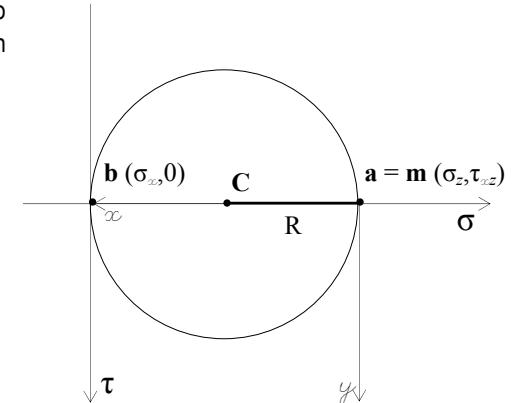


→ compare il segno meno, poiché la deformazione è opposta alla precedente → è generata dalla compressione anziché dalla trazione.

È quindi possibile rappresentare il comportamento della sezione mediante un unico cerchio di Mohr → σ_z è costantemente distribuita in tutta la sezione; in questo caso il punto **m** coincide con **a**, poiché non si verificano tensioni tangenziali.

$$\sigma_z \neq 0, \sigma_x = 0, \tau_{xz} = 0$$

→ il piano della sezione è un piano principale, e la σ_1 di trazione coincide con la σ_z → caso monoassiale.



Flessione in trave di De Saint-Venant (formula di Navier).

Prendere una trave soggetta a due momenti M_x costanti in tutta la trave.

Il pedice x indica intorno a quale asse ruota il momento; in questo caso, l'asse x è l'asse di sollecitazione.

Le fibre della sezione saranno tese al lembo inferiore e compresse al superiore.

$$M_x = \int_A \sigma_z * y \, dA$$

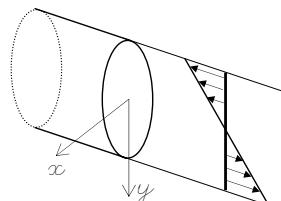
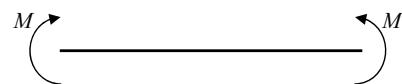
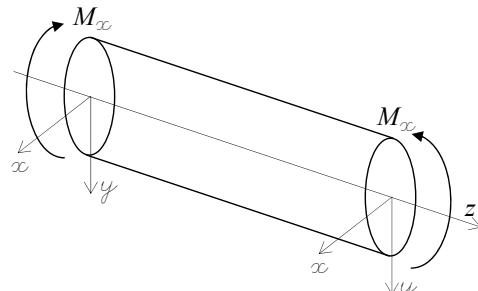
$$\sigma_z = K_y$$

→ σ_z digrada da un valore massimo fino a coincidere con l'asse neutro, dove non si verifica tensione σ_z .

$$M_x = \int_A K_y * y \, dA = K \int_A y^2 \, dA = K * I_x$$

$$\sigma_z = K_y = \frac{M_x}{I_x} * y$$

→ flessione semplice retta (formula di Navier).

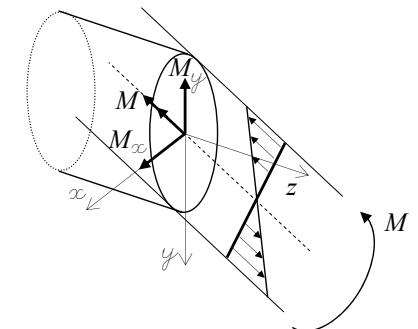


→ La tensione è direttamente proporzionale al momento flettente, inversamente proporzionale al momento di inerzia e dipende da che punto y della sezione viene analizzato.

→ si andrà a verificare la tensione della sezione ai lembi superiore ed inferiore, dove è massima.

Il momento flettente, in ogni caso, può agire secondo un asse che non è un asse principale di inerzia (x o y).

→ È possibile trattare il momento come un vettore (rappresentato dalla doppia freccia) e scomporlo in due componenti secondo gli assi principali.



$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} * y - \frac{M_y}{I_y} * x$$

→ flessione deviata.

→ è stato posto il segno meno al secondo membro poiché la componente di M secondo y è discorde rispetto al verso dell'asse.

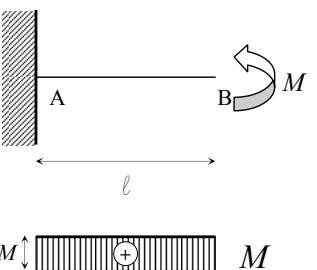
SFORZO NORMALE E FLESSIONE

-esempio pratico-

Prendere una trave incastrata a sezione rettangolare.

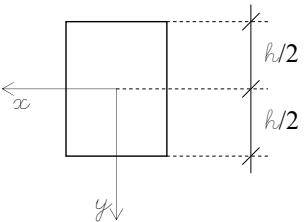
Non si verifica né taglio T né sforzo normale $N \rightarrow M$ positivo e costante in tutte le sezioni della trave.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} * y$$



Per assi baricentrici di sezioni rettangolari i momenti di inerzia sono pari a:

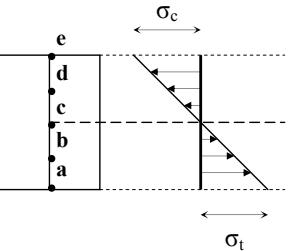
$$I_{xG} = \frac{bh^3}{12}$$



Trovandosi sull'asse neutro non si verifica tensione. $\rightarrow y = 0$

Sostituendo $h/2$ ad y :

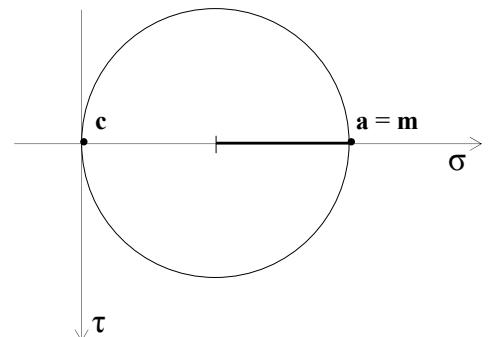
$$\sigma_z = \frac{M_x 12}{bh^3} * \frac{h}{2} \rightarrow 6 \frac{M_x}{bh^2} \rightarrow \sigma_t \text{ trazione.}$$



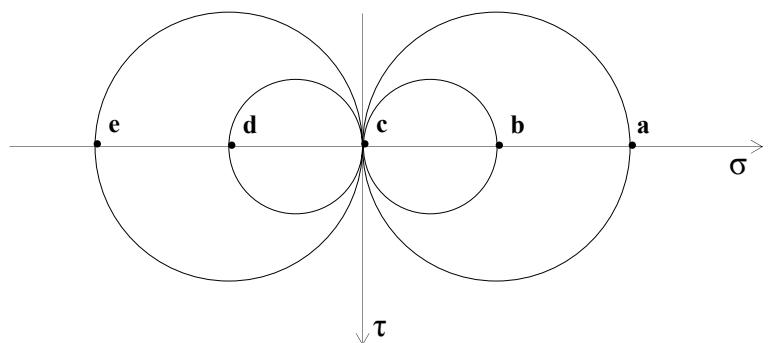
$$\sigma_z = \frac{M_x 12}{bh^3} * -\frac{h}{2} \rightarrow -6 \frac{M_x}{bh^2} \rightarrow \sigma_c \text{ compressione.}$$

È ora possibile applicare il cerchio di Mohr, secondo il modello trave di De Saint-Venant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_z \neq 0 \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$$



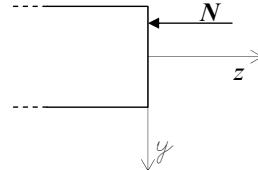
\rightarrow il valore σ_z coincide con il valore massimo di trazione, mentre $-\sigma_z$ con il massimo di compressione. Scegliendo i punti **b** o **d**, non si ottengono valori utili alla verifica; scegliendo il punto **c**, il cerchio di Mohr degenera in un punto.



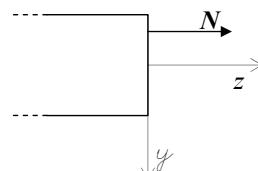
Calcolo delle tensioni massime in una sezione.

Prendere un pilastro incastrato, con applicato uno sforzo normale N eccentrico.

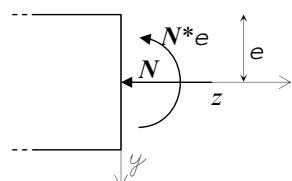
Pressoflessione
→ compressione eccentrica.



Tenoflessione
→ trazione eccentrica.



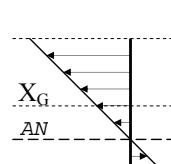
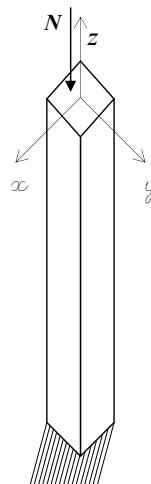
→ elaborando un sistema equivalente, si giunge alle seguenti conclusioni:



$$\sigma_z = \frac{N}{A} y$$

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$



Si ha sovrapposizione degli effetti fra un campo costante prodotto da N ed uno a "farfalla" prodotto da M .

N.b. nella somma, l'asse baricentrico X_G non coincide più con l'asse neutro (AN).

Quindi, in caso di sforzo normale N eccentrico, è possibile enunciare:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} y$$

Equazione che, se posta uguale a zero, restituisce la posizione dell'asse neutro.

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} y = 0$$

Semplificando e riducendo il tutto:

$$M_x = N^* e$$

$\rho^2 x = I_x/A \rightarrow$ raggio di inerzia secondo l'asse x .

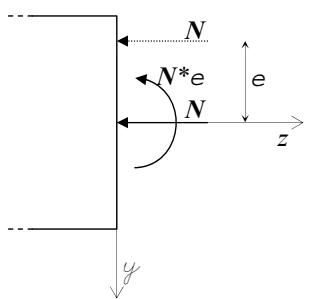
$$\frac{N}{A} + \frac{Ne}{\rho^2 x A} y = 0 \rightarrow \frac{N}{A} \left[1 + \frac{e}{\rho^2 x} y \right] = 0$$

ma, sapendo che $N/A = 0$ non è una condizione possibile, è sufficiente porre uguale a zero il resto dell'equazione.

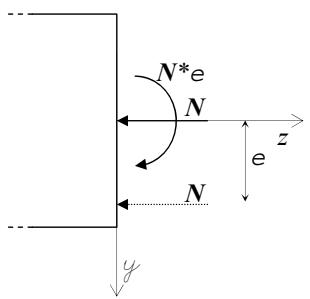
$$1 + \frac{e}{\rho^2 x} y = 0 \rightarrow \text{equazione dell'asse neutro.}$$

SFORZO NORMALE E FLESSIONE

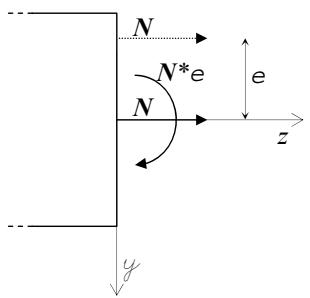
$$\sigma_z = -\frac{N}{A} \left[1 - \frac{e}{\rho_x^2} y \right]$$



$$\sigma_z = -\frac{N}{A} \left[1 + \frac{e}{\rho_x^2} y \right]$$



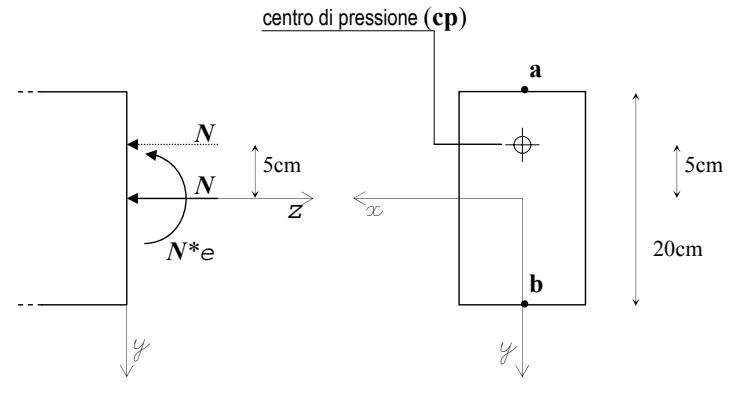
$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left[1 - \frac{e}{\rho_x^2} y \right]$$



$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left[1 + \frac{e}{\rho_x^2} y \right]$$

→ Per ottenere il risultato voluto, sostituire ai termini N , A , ρ , e i valori in analisi senza *cambi di segno*; variare solamente il segno della y secondo la convenzione indicata.

-esempio pratico-



$$N = 10 \text{ tonnellate}$$

$$A = 20 \times 10 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2$$

$$I_x = bh^3/12 = 10 \times (20)^3/12 = 6666,67 \text{ cm}^4$$

$$\rho_x^2 = I_x/A = 33,33 \text{ cm}^2 \rightarrow \rho_x = 5,77 \text{ cm}$$

? = asse neutro e tensione σ_z al lembo superiore ed inferiore.

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{Ne}{\rho_x^2 A} y$$

$$\rightarrow (-10t / 200\text{cm}^2) + (-10t * -5\text{cm}) * y / 33,33\text{cm}^2 * 200\text{cm}^2 = 0$$

$$\rightarrow -10t / 200\text{cm}^2 * (1 - (5\text{cm} * y / 33,33\text{cm}^2)) = 0$$

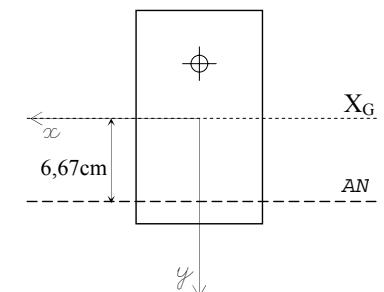
$$\rightarrow 1 - (5\text{cm} * y / 33,33\text{cm}^2) = 0$$

$$\rightarrow 1 - (5 * y / 33,33\text{cm}) = 0$$

$$\rightarrow 5y / 33,33\text{cm} = 1$$

$$\rightarrow y = 33,33\text{cm} / 5 \rightarrow y = 6,67\text{cm}$$

N.b. l'asse neutro, rispetto all'asse bari-centrico, è sempre antipolare al centro di pressione.



→ Metodo grafico per individuare la posizione dell'asse neutro:

Congiungere e con p_x , costruendo un triangolo rettangolo. Il punto di intersezione con l'asse y appartiene all'asse neutro.

$$y_{AN} (\text{asse neutro}) = p_x^2 / e$$

$$y_{AN} : p_x^2 = p_x : e$$

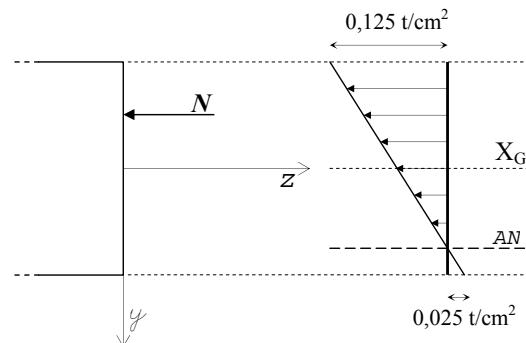
→ tale metodo permette di controllare subito se l'asse neutro cade o meno all'interno della sezione.

È ora possibile calcolare le tensioni σ_z al lembo superiore ed inferiore. E' sufficiente verificare la sezione in $\pm y$, e cioè in $\pm h/2$, e cioè in $\pm 10\text{cm}$.

N.b. le distanze y sono prese dall'asse baricentrico al lembo superiore ed inferiore.

$$\begin{aligned}\sigma_z(a) &= -10t/200\text{cm}^2 * (1 - (10\text{cm} * 5\text{cm}/33,33\text{cm}^2)) \\ &= 0,025 \text{ t/cm}^2 \rightarrow \text{trazione massima.}\end{aligned}$$

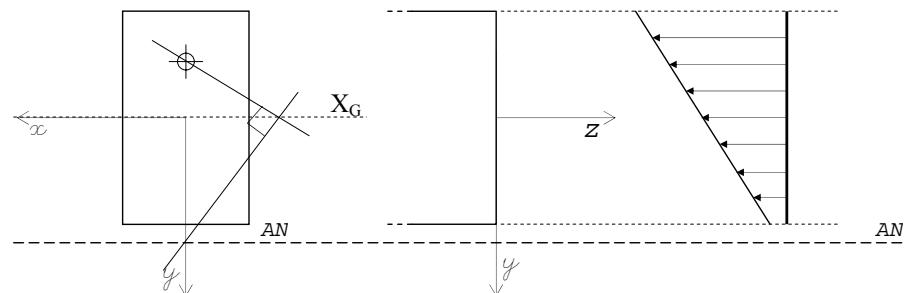
$$\begin{aligned}\sigma_z(b) &= -10t/200\text{cm}^2 * (1 - (-10\text{cm} * 5\text{cm}/33,33\text{cm}^2)) \\ &= -0,125 \text{ t/cm}^2 \rightarrow \text{compressione massima.}\end{aligned}$$



TEORIE DI DE SAINT-VENANT

Considerazioni:

- È intuitibile dal principio che il valore di compressione sia più grande di quello di trazione, innanzitutto per sovrapposizione degli effetti ed in secondo luogo per la posizione dell'asse neutro.
- Più il centro di pressione **cp** si allontana dall'asse baricentrico, più l'asse neutro si avvicina all'asse baricentrico.
- Se il **cp** coincide con l'asse baricentrico, l'**AN** va all'infinito → si ha solo trazione compressione semplice.
- Se l'asse neutro cade al di fuori della sezione, si avrà una situazione di questo genere:



D.4

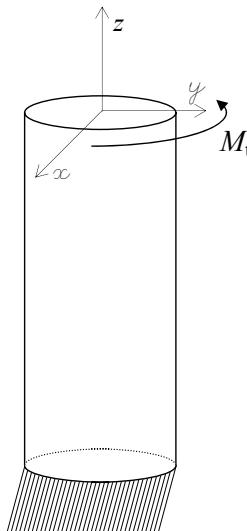
TORSIONE

TORSIONE

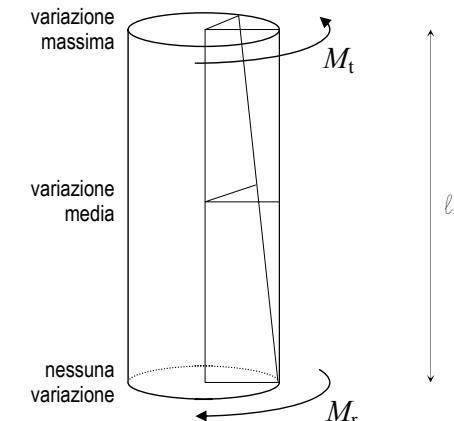
Momento torcente in trave di De Saint-Venant.

In un graticcio di travi, ciò che è flettente per una trave è torcente per la trave perpendicolare.

La trave a sezione circolare, come quella in analisi, possiede il vantaggio della simmetria radiale → la sezione non esce mai dal piano di appartenenza, anche sotto l'azione di un momento torcente; una sezione rettangolare si ingobbierebbe, uscendo dal proprio piano.



configurazione di partenza



configurazione variata

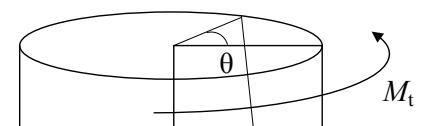
M_t = momento torcente, agente intorno all'asse z .

M_r = momento reagente.

$$\theta(z) = \Theta z$$

dove:

- θ = angolo di torsione;
- Θ = angolo unitario di torsione;
- z = asse della trave;
- ℓ = lunghezza della trave.



→ L'angolo θ di torsione è *funzione lineare* della distanza z , ed è uguale a Θ (costante che restituisce l'idea di come ruota un oggetto sotto l'effetto di un momento torcente) per la distanza z .

Pensando la trave come una pila di monetine, ogni moneta ruota in modo diverso e trasmette una tensione alla successiva.

Il centro resta fisso. La tensione cresce fino ad essere massima alla circonferenza. N.b. per le circonferenze, tutte le concentriche sono assi principali.

$$M_t = \int_A \tau_{zs} * r \, \partial A$$

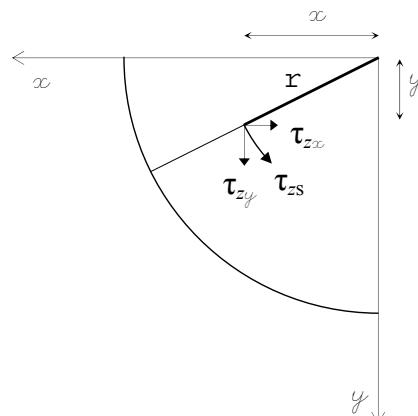
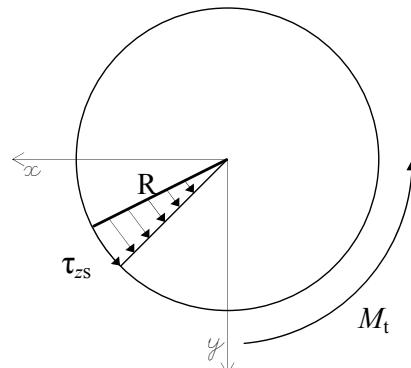
→ integrale esteso all'area.

Scomporre una tensione τ_{zs} tangente alla circonferenza secondo x ed y , ottenendo

$$\tau_{zx} \text{ e } \tau_{zy}$$

I bracci di τ_{zx} e τ_{zy} sono generici, ma il verso delle due tensioni indica quale segno è necessario applicare → τ_{zx} è discorde con la direzione x e quindi negativo, τ_{zy} è concorde con y e quindi positivo.

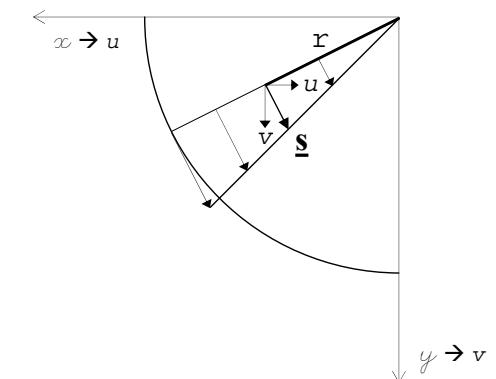
$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) \, \partial A \quad \rightarrow \text{momento torcente.}$$



Approccio agli spostamenti di Neumann: assegnare un campo di spostamento in relazione a θ , vedendo come si modifica il tutto.

Ogni \underline{s} è un vettore, appartenente al piano della sezione. Prendere un \underline{s} qualsiasi e scomporlo secondo i vettori unitari u e v .

L'asse z è l'asse *neutro per la rotazione* → sapendo che le sezioni di una trave cilindrica non escono dal loro piano, non si hanno componenti $z \rightarrow w$.



$$u_{(\text{discorde con } x)} = -\theta(z)^*y = -\Theta zy$$

$$v_{(\text{concorde con } y)} = \theta(z)^*x = \Theta zx$$

È ora possibile andare a verificare le deformazioni del sistema.

Dilatazioni lineari specifiche:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-\Theta zy)}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{la derivata di } x \text{ rispetto ad } y \text{ è pari a zero.}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(\Theta zx)}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{la derivata di } y \text{ rispetto ad } x \text{ è pari a zero.}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow \text{non si verificano azioni in } z.$$

Variazioni angolari:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(\Theta z x)}{\partial x} + \frac{\partial(-\Theta z y)}{\partial y} = \Theta z - \Theta z = 0$$

→ sono le derivate di x rispetto ad x e di y rispetto ad $y = 1$, che quindi moltiplicate per una costante (Θz) restituiscono la costante stessa.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(-\Theta z y)}{\partial z} = -\Theta y$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(\Theta z x)}{\partial x} = \Theta x$$

La relazione sostitutiva per un corpo lineare isotropo enuncia che, per un corpo lineare isotropo, le deformazioni trasversali sono legate alle tensioni longitudinali mediante il coefficiente G (vedi p.88).

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = -G \Theta y$$

$$\tau_{zy} = G \gamma_{zy} = G \Theta x$$

E quindi:

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{xz} y) \partial A = \int_A (G \Theta x) x - (-G \Theta y) y \partial A$$

Trasportando le costanti al di fuori del segno di integrale:

$$\rightarrow M_t = G \Theta \int_A (x^2 + y^2) \partial A$$

→ L'integrale in A di $x^2 + y^2$ è il *momento di inerzia polare I_p* per travi a sezione circolare.

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} \rightarrow \text{formula del momento di inerzia polare, assimilabile a quella del momento di inerzia lineare.}$$

Sostituendo con la nuova simbologia:

$$\rightarrow M_t = G \Theta I_p$$

$$\rightarrow \Theta = \frac{M_t}{G I_p} \rightarrow \text{più forte è il momento, più grande è l'angolo di torsione.}$$

→ $G I_p$ è la *rigidezza torsionale*. G in questo caso è il modulo di elasticità torsionale.

$$\tau_{xz} = -G \frac{M_t}{G I_p} y = -\frac{M_t}{I_p} y$$

$$\tau_{zy} = G \frac{M_t}{G I_p} x = \frac{M_t}{I_p} x$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{M_t}{I_p} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{M_t}{I_p} R_{\text{aggio}}$$

Momento torcente di sezioni cave (formula di Bredt).

Caso A.

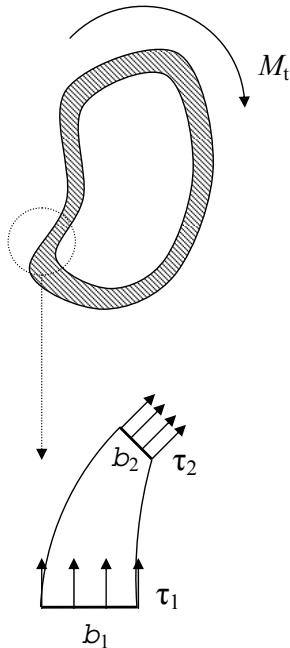
Prendere una sezione cava chiusa, una sorta di tubo.

Secondo l'*ipotesi di Greenhill* le tensioni tangenziali "viaggiano" nella sezione come il flusso di un fluido \rightarrow più l'imboccatura è stretta più il flusso è veloce, poiché si ha sempre la medesima quantità di fluido che la attraversa.

$$\rightarrow b_1 \tau_1 = b_2 \tau_2$$

Le tensioni tangenziali si "inseguono", possono essere sempre costanti nello spessore, secondo le concentriche della sezione; si comportano, appunto, come un fluido.

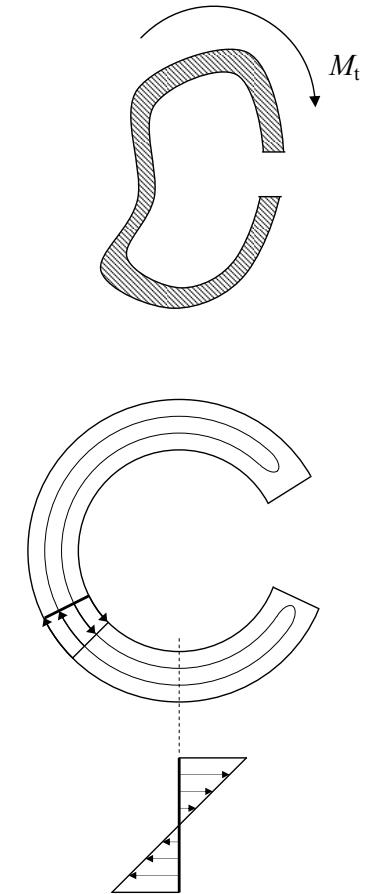
Tagliando la sezione in un punto qualsiasi, si ha un diagramma tensionale del tipo illustrato a fianco, tenendo sempre conto del fatto che lo spessore è abbastanza piccolo da considerare costanti le tensioni.



Caso B.

Prendere una sezione cava aperta in un tratto.

\rightarrow anche in questo caso le tensioni si inseguono, formando un diagramma delle tensioni a farfalla.



Analizzando il caso A:

prendendo il medesimo oggetto cavo con baricentro G , isolare una porzione dc .

T è la risultante delle tensioni tangenziali appartenenti alla porzione.

→ ogni porzione va ad equilibrare il M_t complessivo.

→ ogni porzione, quindi produce un piccolo momento torcente, la sommatoria dei quali è il M_t totale.

r_1 ed r_2 sono i bracci delle risultanti τ_1 e τ_2 , perpendicolari alle risultanti, rispetto al baricentro G .

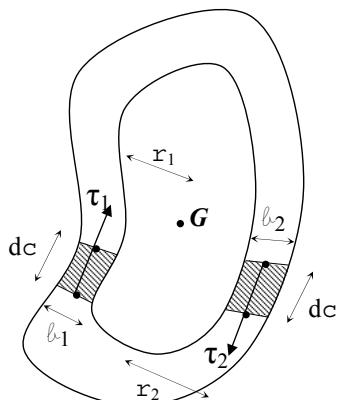
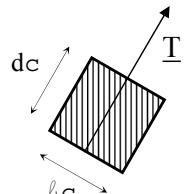
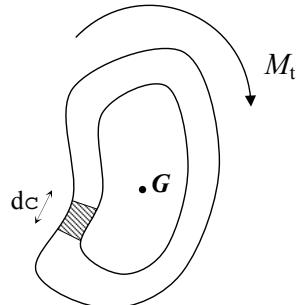
Il momento di ciascuna risultante sarà:

$$\tau_1 b_1 dc * r_1$$

$$\tau_2 b_2 dc * r_2$$

→ $\tau_1 b_1$ e $\tau_2 b_2$ sono uguali, per la sannominata legge del flusso.

$$\rightarrow \tau b_{\text{medio}} * \sum r dc$$

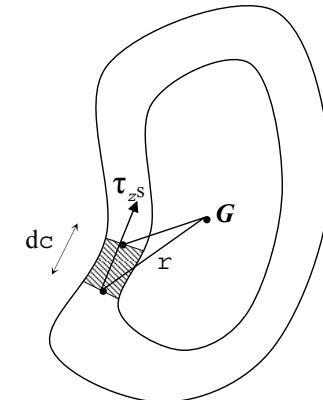


TORSIONE

N.b. in questo caso, r identifica la congiungente fra i lembi inferiore e superiore di dc ed il baricentro G .

Portando questa funzione al limite:

$$\rightarrow \tau b_{\text{medio}} \int_c r dc = M_t \text{ totale.}$$

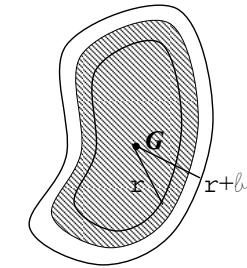


L'integrale di $r*dc$ è il doppio dell'area di tutti i triangoli, fatti dalle congiungenti, che costituiscono l'area della sezione.

→ area media.

$$AM = r * dc = 2\Omega$$

$$AM = \pi r^2 = \pi(r+b/2)^2$$



quindi:

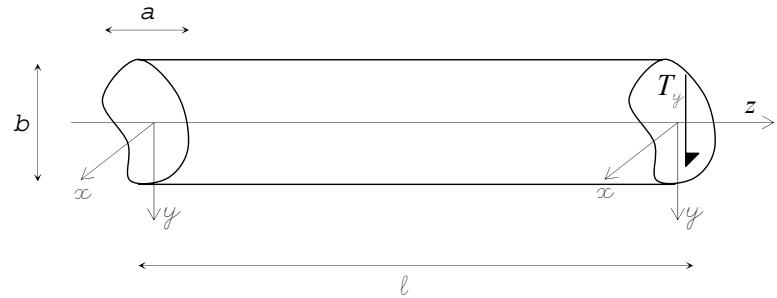
$$\tau_{zs} = \frac{M_t}{2\Omega * b_{\text{medio}}}$$

→ legge di Bredt.

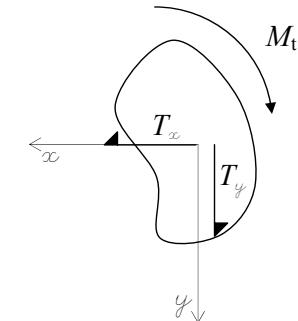
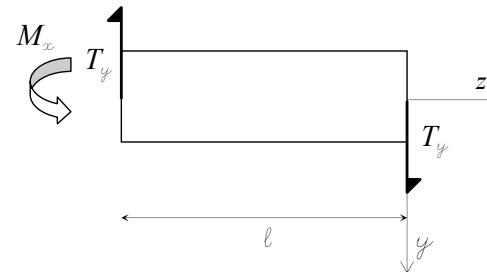
D.5 AZIONI TAGLIANTI

TEORIE DI DE SAINT-VENANT

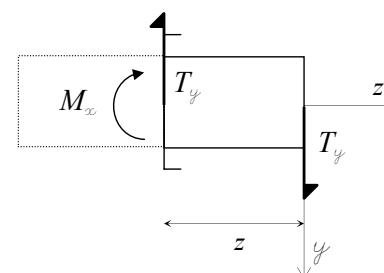
Taglio in trave di De Saint-Venant.



Quando il taglio (T_y) è eccentrico rispetto agli assi uscenti dal baricentro della sezione, diventa parte del momento torcente (M_t).



Si tratta del caso in cui il taglio agisce sugli assi principali di inerzia.



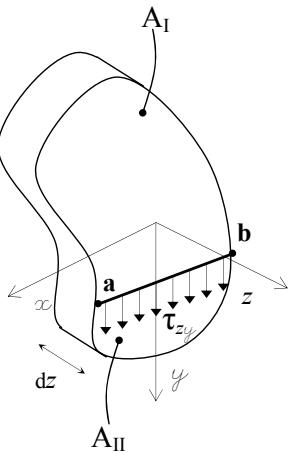
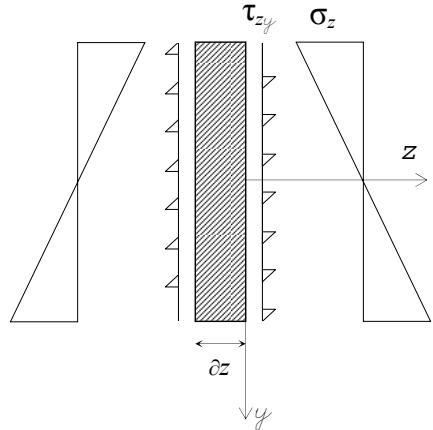
M_x dà equilibrio al sistema.
N.b. Il taglio è sempre associato al momento flettente.

$$\rightarrow M_x = -T_y(l-z)$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} * y = -\frac{T_y(l-z)}{I_x} * y$$

Trattazione di Jourasky.

Ingrandendo un concio della suddetta trave:



ab = corda qualsiasi che divide la sezione in due aree, A_I ed A_{II} .

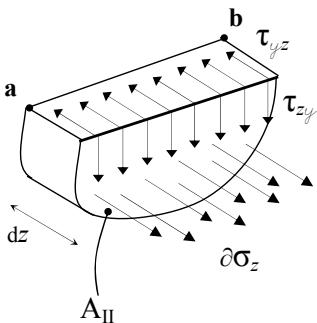
$$\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} * dz$$

→ sommare alla tensione σ_z che esiste senza il concio dz la risultante delle tensioni $\partial \sigma_z$ dell'area sottesa alla corda.

È quindi possibile costruire un integrale.

$$-\int_{A_{II}} \sigma_z dA + \int_{A_{II}} \left[\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} dz \right] dA + \int_0^b \tau_{yz} dx dz = 0$$

$$\int_{A_{II}} \left[-\cancel{\sigma_z} + \cancel{\sigma_z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} dz \right] dA + \int_0^b \tau_{yz} dx dz = 0$$



Sostituendo e semplificando σ_z nella prima parte dell'integrale:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} * y = - \frac{T_y (l-z)}{I_x} * y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[- \frac{T_y (l-z)}{I_x} y \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[- \frac{T_y l}{I_x} y + \frac{T_y z}{I_x} y \right] = \frac{T_y}{I_x} y$$

$$\int_{A_{II}} \frac{T_y}{I_x} y dA + \int_0^b \tau_{yz} dx dz = 0$$

Trarre dal segno di integrale le costanti (N.b. l'integrale di τ_{yz} in dx da 0 a b è pari a $\tau_{yz} b$ per la lunghezza dell'intera corda ab = b):

$$\frac{T_y}{I_x} \int_{A_{II}} y * dA = - \tau_{yz} b$$

è il momento statico S_x dell'area A_{II} .

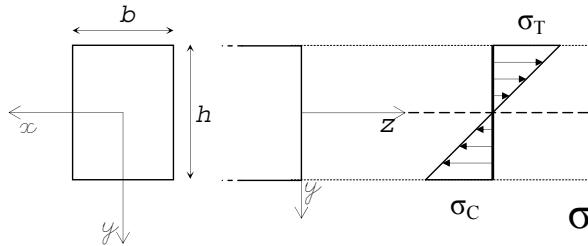
$$\frac{T_y}{I_x} S_x(A_{II}) = - \tau_{yz} b$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{yz} = - \frac{T_y S_x(A_{II})}{I_x b}}$$

Quindi:

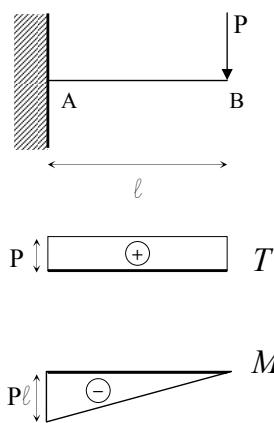
$$T_y = \int \tau_{zy} dA \rightarrow \boxed{\tau_{zy} = \frac{T_y S_x}{I_x b}} \rightarrow \text{formula di Jourasky.}$$

-esempio pratico-



$$\sigma_T = P\ell * \frac{12}{bh^3} * \frac{h}{2} = \frac{6P\ell}{bh^2}$$

$$\sigma_C = P\ell * \frac{12}{bh^3} * -\frac{h}{2} = -\frac{6P\ell}{bh^2}$$

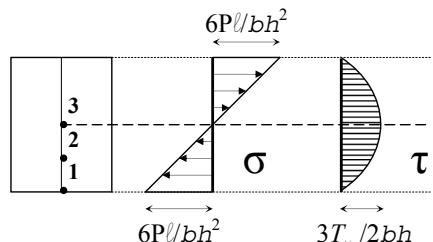


Alle estremità le τ saranno pari a zero \rightarrow le τ dipendono dal momento statico S_x , che è il momento di una sezione compresa fra due corde. \rightarrow si andrà a calcolare il momento statico nell'asse baricentrico per metà sezione.

$$b = b$$

$$S_x = \frac{bh}{2} * \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

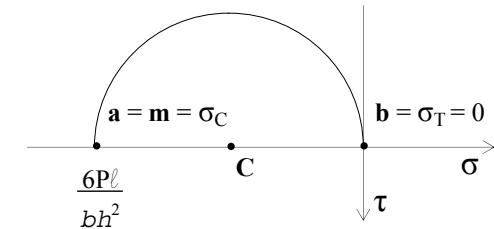
$$\tau_{zy} = \frac{T_y}{b} \frac{12}{bh^3} * \frac{bh^2}{8} = \frac{3T_y}{2bh} = \frac{3T_y}{2A}$$



TEORIE DI DE SAINT-VENANT

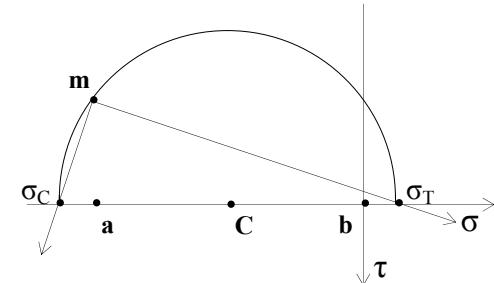
Verifica nel punto 1.

\rightarrow si ha solo σ_C .



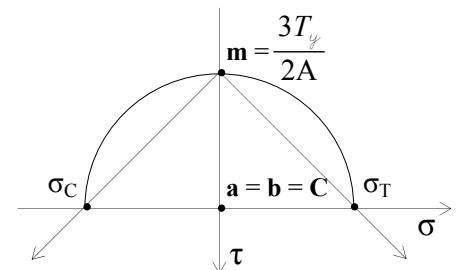
Verifica nel punto 2.

\rightarrow per effetto delle τ si verifica anche una σ_T principale di trazione.



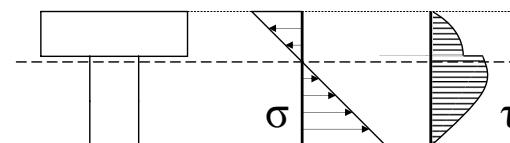
Verifica nel punto 3.

\rightarrow si hanno due σ principali di trazione e compressione, che si elidono perché uguali in modulo.



Considerazioni:

se σ_z è a farfalla, τ_{zy} è parabolico.



\rightarrow il diagramma delle τ è formato sezioni paraboliche variabili.

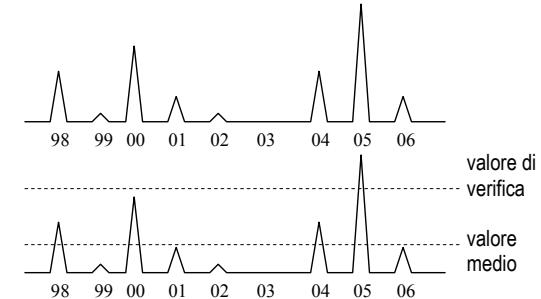
D.6

PRATICA

Metodo di verifica delle tensioni ammissibili.

Il metodo delle tensioni ammissibili pone come base per l'analisi le *azioni caratteristiche*, azioni che, nell'arco di un periodo di vita stabilito della struttura, hanno la probabilità del 95% di essere superate.

Analizzando l'azione della neve negli anni:
 → non è possibile prendere il valore medio, ovviamente troppo basso; si andrà a trovare un valore che viene superato, ad esempio, solo nel 5% dei casi, in modo da costituire un livello ragionevole, non troppo alto. → valori poco probabili ma possibili.

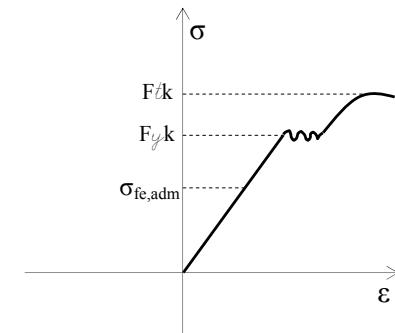
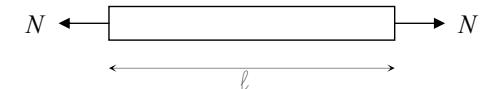


Ad esempio, si prenda un tondino di acciaio con applicato uno sforzo normale di trazione N .

→ il materiale si deforma. Il grafico ha un andamento lineare fino ad un andamento F_yk , poi si snerva, incrudisce e collassa.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$



La nomenclatura delle barre "FeB44k" è uguale al limite $F_yk = 44 \text{ kg/mm}^2 = 440 \text{ MPa}$ o $\text{N/mm}^2 = 4400 \text{ kg/cm}^2$. Fe sta per ferro, B per barre.

A tutto questo si pone un valore limite inferiore a F_yk .

→ $\sigma_{\text{ferro, ammissibile}} = 2600 \text{ kg/cm}^2$.

TEORIE DI DE SAINT-VENANT

È chiaro che ci si riferisce solo allo stato elastico del materiale.

$$E = \sigma_{fe,adm} / \epsilon = 2,1 * 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

La verifica viene condotta per confronto fra la σ_n ottenuta e la $\sigma_{fe,adm}$.

$$\rightarrow \sigma_n \leq \sigma_{fe,adm}$$

Metodo di verifica degli stati limite.

Vengono applicati alle azioni caratteristiche dei coefficienti amplificativi.

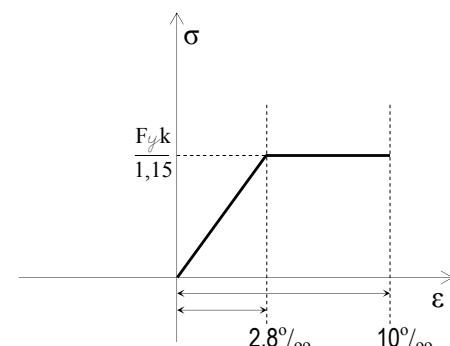
Carichi permanenti: $\begin{cases} 1 \\ 1,4 \end{cases}$

Carichi accidentali: $\begin{cases} 1,5 \rightarrow \text{carichi principali} \\ 1,05 \rightarrow \text{carichi secondari} \\ 0 \end{cases}$

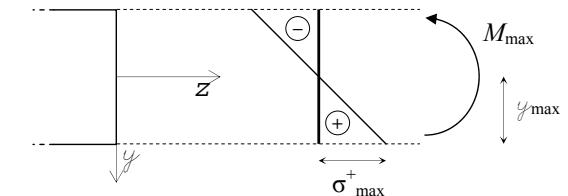
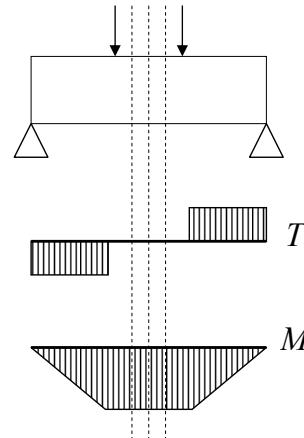
Per l'acciaio, $F_y k$ è di 3818 kg/cm^2 .

$10\%_{oo}$ (dieci per mille) è il valore oltre il quale non è dato andare per l'acciaio nel sistema degli stati limite. \rightarrow si tiene conto anche del materiale nello stato incrinante e plastico.

$2,8\%_{oo}$ è un valore stabilito, poiché E , che dipende dal materiale, è ovviamente il medesimo in tutti i paesi.



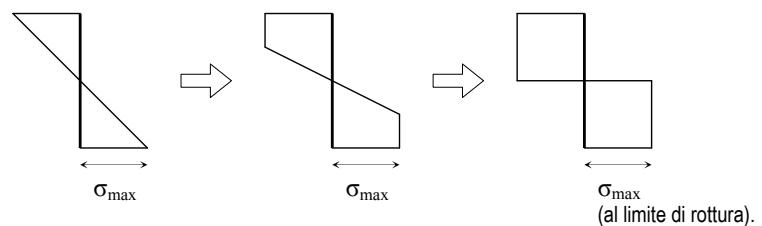
La flessione semplice, come noto, avviene dove non si ha taglio ($\tau \neq 0$) e si verifica momento massimo ($\sigma \neq 0$).



$$\sigma_{max}^+ = \frac{M_{max}}{W} = \frac{M_{max}}{I} * y_{max}$$

$$\text{criterio di resistenza: } \frac{M}{W} \leq \sigma_{adm}$$

Raggiungendo il valore $F_y k$ la σ non può più aumentare, e quindi il grafico cambia:

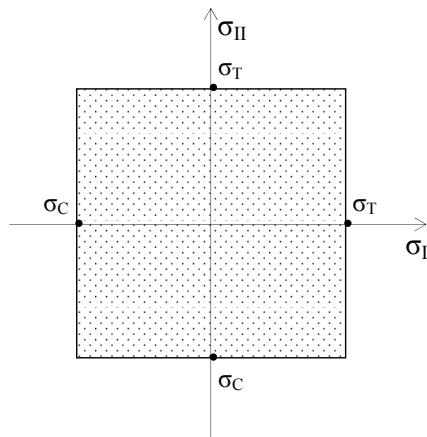
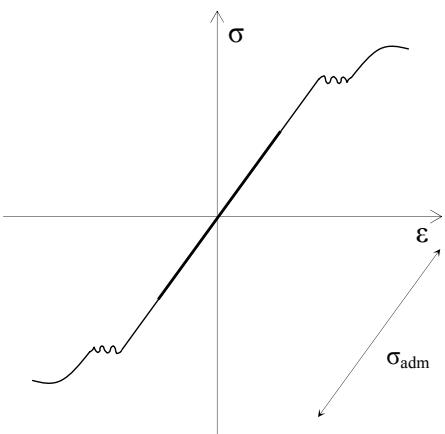


\rightarrow nel metodo degli stati limite si tiene conto della riserva di resistenza del materiale in campo plastico. N.b. in ogni caso, la deformazione resta.

Casi di stati pluriassiali (ipotesi di Von Mises).

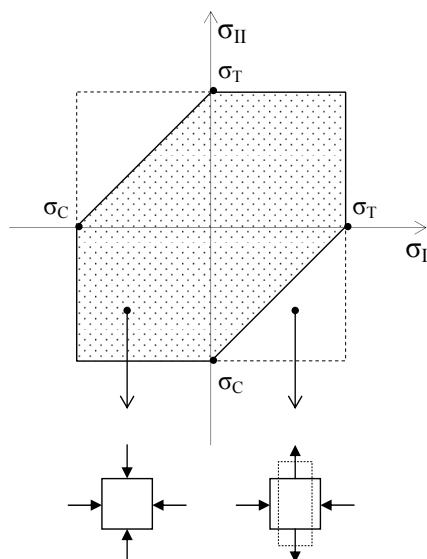
Se nelle tensioni ammissibili si limita la σ_n con una $\sigma_{fe,adm}$, in caso pluriassiale si procede in modo analogo.

$$\sigma_C \leq \sigma_x \leq \sigma_T \rightarrow \sigma_C \leq \sigma_I \leq \sigma_T, \sigma_C \leq \sigma_{II} \leq \sigma_T$$



Per materiali isotropi si ha un campo di dominio quadrato, che determina le tensioni ammissibili per il materiale.

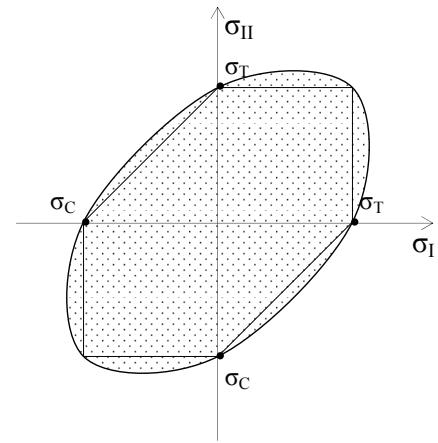
Cercando un modello che descrivesse meglio la realtà, il Tresca formulò un grafico sostitutivo (vedi p.90-91).



Analogamente al criterio di Tresca è possibile usare l'ellisse di Von Mises, derivante da dati puramente sperimentali.

$$\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - (\sigma_I * \sigma_{fe})} \leq \sigma_{adm}$$

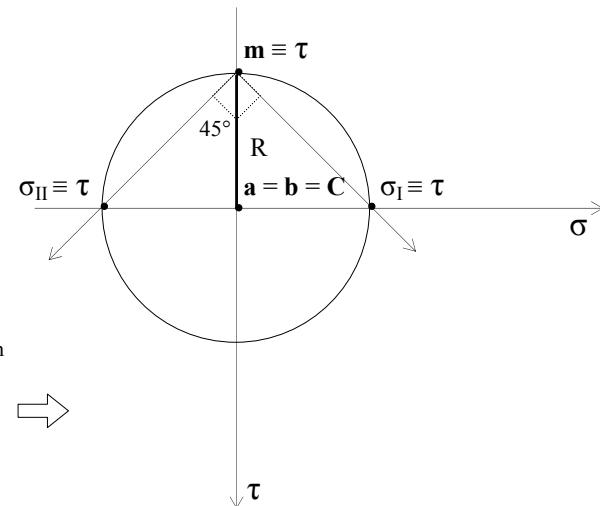
→ ipotesi di Von Mises.



-esempio pratico-

In caso di torsione pura con trave di Saint-Venant.

$$\sigma_z \neq 0; \quad \tau_{zx} \neq 0; \quad \tau_{zy} \neq 0.$$



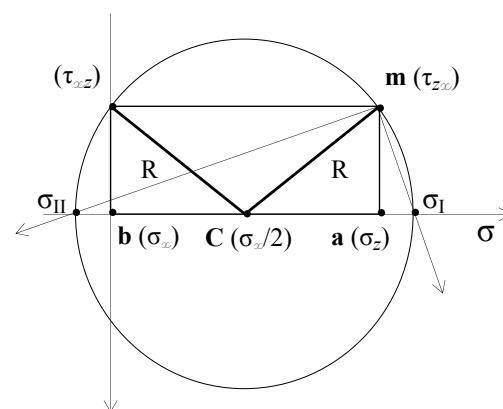
$$\sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} = \sqrt{3} * \tau \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$\rightarrow \tau_{\text{adm}} = \sigma_{\text{adm}} / \sqrt{3}$$



Per la reciprocità delle tensioni tangenziali, le due τ_{xz} e τ_{zx} sono uguali, e σ_z è zero secondo il modello di De Saint Venant.

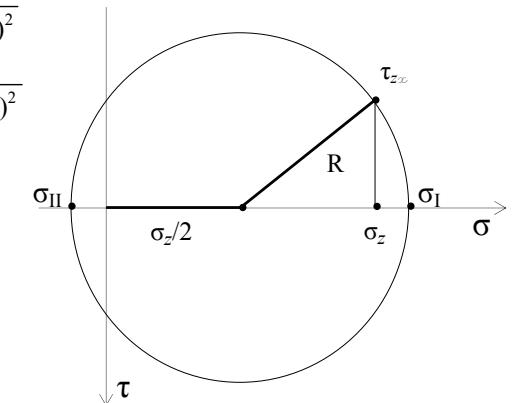
→ quando una delle due σ è zero le due τ sono sempre uguali.



TEORIE DI DE SAINT-VENANT

$$\sigma_I = \sigma_z/2 + R = \sigma_z/2 + \sqrt{(\sigma_z/2)^2 + (\tau_{zx})^2}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_z/2 - R = \sigma_z/2 - \sqrt{(\sigma_z/2)^2 + (\tau_{zx})^2}$$



Quindi:

$$\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - (\sigma_I * \sigma_{fe})} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$\sqrt{\left[\sigma_z/2 + \sqrt{(\sigma_z/2)^2 + (\tau_{zx})^2} \right]^2 + \left[\sigma_z/2 - \sqrt{(\sigma_z/2)^2 + (\tau_{zx})^2} \right]^2 - (\sigma_I * \sigma_{fe})} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

semplificando →
$$\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zx}^2} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

→ il termine in radice è la *sigma ideale* σ_{id} , che è la grandezza indice del pericolo da confrontare con la *sigma ammissibile* σ_{adm} per verificare una struttura.

Verifiche e dimensionamenti.

Per procedere con i dimensionamenti, è necessario conoscere le *formule inverse* dei teoremi di Navier, Jouraski, Bredt. In questo caso viene in aiuto l'ipotesi di Von Mises.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Prendere sempre come modello la trave di De Saint-Venant

$$\sigma_z \neq 0; \quad \tau_{zx} \neq 0; \quad \tau_{zy} \neq 0.$$

N

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

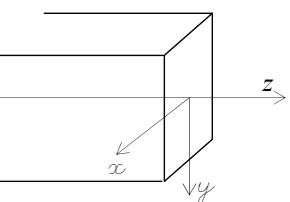
$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2} = \left|\frac{N}{A}\right| = |\sigma| \rightarrow -\sigma_{adm} \leq \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}$$

T

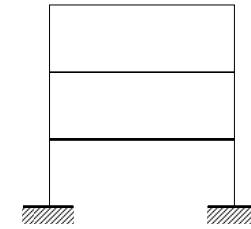
$$\sigma_{id} = \sqrt{3}\tau$$

M

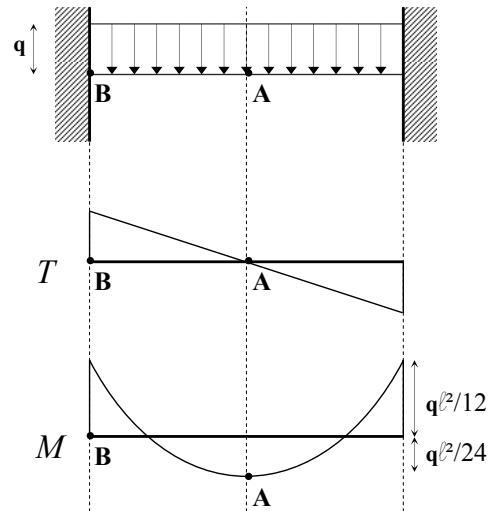
$$-\sigma_{adm} \leq \sigma_{id} = \frac{M}{W} \leq \sigma_{adm}$$

-esempio pratico-

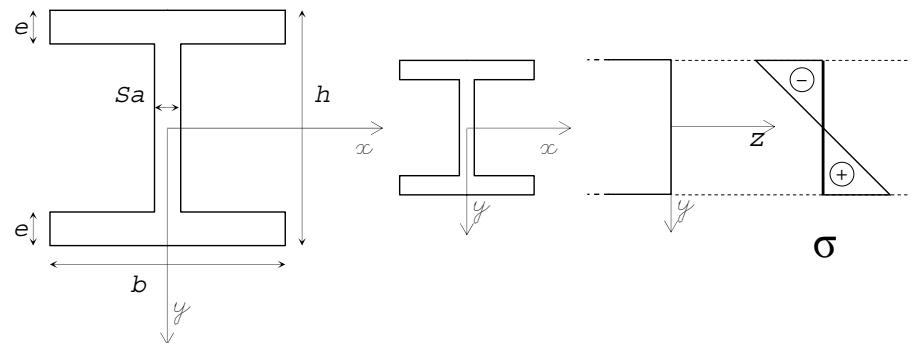
Prendere un telaio strutturale, analizzando una delle travi.

Sezione in A (mezzeria).

- Il taglio T è nullo.
- Non si hanno sforzi normali N .
- Non si ha momento torcente M_t .
- Esiste un momento M_x^+ positivo (N.b. il piano posto è zy , quindi la rotazione avviene intorno a x).



Ponendo che le travi in analisi siano in acciaio, sezione HE:



$$M_x = \int_A \sigma_z * y \, dA \rightarrow \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} * y$$

→ formula di Navier, che descrive la flessione semplice retta (vedi p. 104).

→ l'acciaio si comporta nello stesso modo a trazione ed a compressione, e la sezione è simmetrica in x . Quindi:

$$\rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} * h/2$$

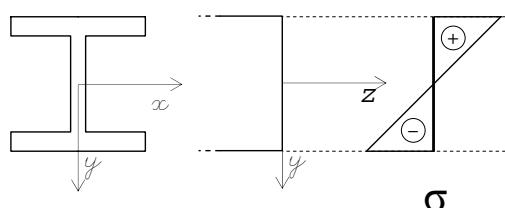
$$\rightarrow \frac{M}{W} \leq \sigma_{fe,adm}$$

$$\rightarrow -\frac{M}{W} \leq -\sigma_{fe,adm}$$

→ se la sezione non fosse stata simmetrica, si procederebbe a due diverse verifiche al lembo inferiore e superiore.

Sezione in **B** (sull'incastro).

- Il taglio è T_y^+ positivo.
- Esiste un momento M_x^- negativo.



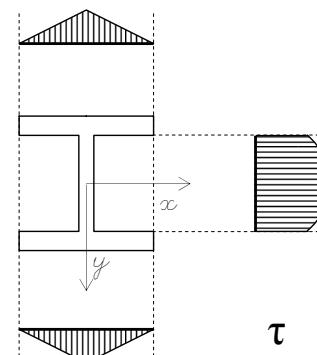
→ la trattazione svolta nella sezione **A** non è più valida, poiché interviene anche il taglio.

$$T_y = \int_A \tau_{zy} \, dA \rightarrow \tau_{zy} = \frac{T_y S_x}{I_x b}$$

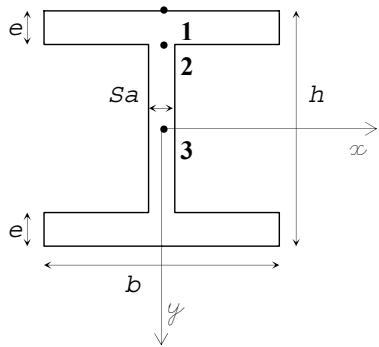
→ formula di Jourasky, dove:

- T_y = taglio in y ;
- S_x = momento statico dell'area sottesa alla corda b ;
- I_x = momento di inerzia di tutta la sezione;
- b = corda qualsiasi, che assume diversi valori.

Il diagramma delle τ ha grossomodo questa forma.



Quindi, la sezione che verrà verificata sarà la sezione **A**, la più sollecitata.



→ vengono scelti tre punti per la verifica: **1** al lembo superiore, **2** subito sotto l'ala superiore e **3** in mezzeria.

Verifica nel punto 3.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{T_y S_x}{I_x b}$$

$$b = sa$$

$$I_{x_{A1}} = \frac{be^3}{12} + (eb) * \left[\frac{h-e}{2} \right]^2$$

$$I_{x_{2(A2)}} = \frac{sa * (h-2e)^3}{12}$$

$$I_{x_{tot}} = 2 \left[\frac{be^3}{12} \right] + 2 \left[(eb) * \left[\frac{h-e}{2} \right]^2 \right] + \frac{sa * (h-2e)^3}{12}$$

$$S_x = (eb) * \frac{h-e}{2} + sa * \frac{h-2e}{2} * \frac{h-2e}{4}$$

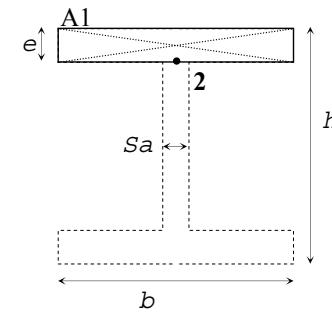
Verifica nel punto 2.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{T_y S_x}{I_x b}$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{M_x}{I_x} * \frac{h-e}{2}$$

$I_{x_{tot}}$ → idem come sopra.



$$b = sa$$

$$S_x = (eb) * \frac{h-e}{2} \rightarrow \text{il momento statico diminuisce gradatamente.}$$

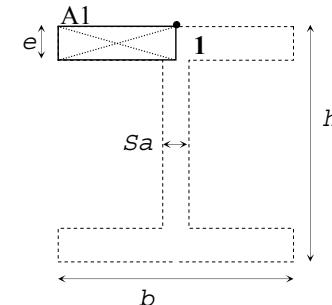
Verifica nel punto 1.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{T_y S_x}{I_x b} \rightarrow \text{idem come sopra.}$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{M_x}{I_x} * \frac{h}{2}$$

$I_{x_{tot}}$ = idem come sopra.



$$b = e$$

→ secondo la teoria del flusso delle τ , il momento statico gira → b diviene e , e quindi è sufficiente metà sezione per l'analisi delle τ .

INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

E

E.1

QUALITÀ, VINCOLI ELASTICI

Qualità dell'equilibrio.

Condizione necessaria per l'equilibrio di un sistema, come noto, è che la sommatoria delle forze agenti e reagenti e la sommatoria dei momenti siano pari a zero. Nell'instabilità dell'equilibrio si analizzano alcuni casi in cui questa necessaria condizione non è sufficiente.

Instabilità = carico di punta.

Il sistema deve essere in equilibrio nella sua qualità \rightarrow non tutti gli equilibri hanno la medesima qualità.

Esempio: bastone rigido incernierato.

caso A: la struttura è labile, ma caricata in questo modo risulta in equilibrio.

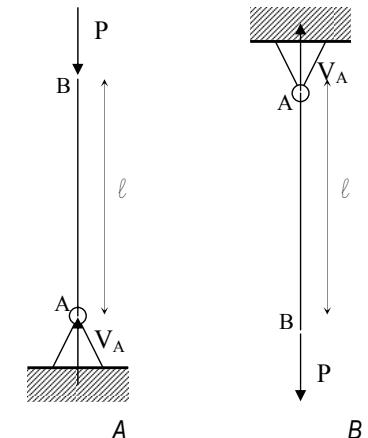
$$\sum H_i = 0$$

$$\sum V_i = 0 \rightarrow V_A - P = 0 \rightarrow V_A = P$$

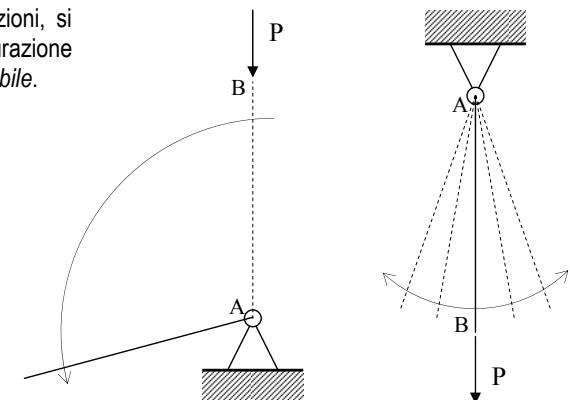
$$\sum M_i = 0$$

caso B: anche il secondo esempio è in equilibrio, ma la qualità dello stesso è maggiore.

\rightarrow l'asta sotto l'effetto di azioni orizzontali (perturbazioni) può muoversi, ma alla fine ritorna nella configurazione standard.
 \rightarrow equilibrio *stabile*.

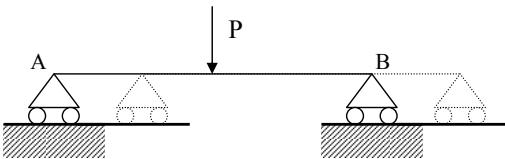


Se l'oggetto, in caso di perturbazioni, si allontana sempre più dalla configurazione di partenza l'equilibrio è detto *instabile*.



Anche in questo caso la struttura è labile, ma regge.

Assegnando una perturbazione, l'oggetto si sposta un po' e poi si ferma \rightarrow equilibrio *indifferente*.



\rightarrow non tutti gli equilibri sono uguali. Per sapere di che equilibrio si tratta bisogna assegnare una perturbazione. Ma comunque, a priori, è necessario verificare che l'oggetto sia in equilibrio.

Ma bisogna tener conto che i materiali sono elastici, non rigidi.

- sistemi rigidi \rightarrow l'equilibrio è un fatto posizionale, non dipende dall'entità della forza;
- è necessario controllare che i vincoli siano ben disposti.
- sistemi elastici \rightarrow controllare il *punto critico*. Dipende dal fatto che il sistema sia:
 - ad elasticità diffusa (in ogni punto);
 - ad elasticità concentrata nei vincoli.

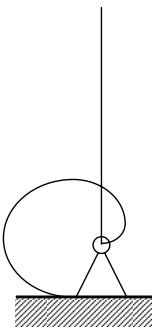
Molla rotazionale.

Il vincolo è formato da tre parti: una cerniera, un incastro ed una molla.

Non è un *vincolo perfetto*, in cui i mondi della cinematica e statica sono separati.

In questo caso cinematica e statica sono collegate fra loro.

Cinematica	statica
$u = 0$	$H \neq 0$
$v = 0$	$V \neq 0$
$\varphi = M/k$	$M = k\varphi$



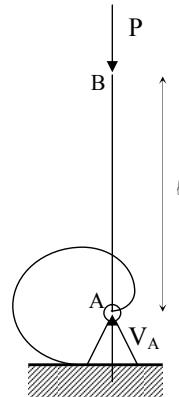
\rightarrow la struttura può ruotare fino ad un valore stabilito in base alla rigidezza k della molla.

$$M = k\varphi$$

\rightarrow rigidezza rotazionale applicata alla molla.

Riprendere il sistema di partenza, ponendo una molla rotazionale.

$$\begin{aligned}\sum H_i &= 0 \\ \sum V_i &= 0 \rightarrow V_A - P = 0 \rightarrow V_A = P \\ \sum M_A &= 0\end{aligned}$$



Cinematica linearizzata.

Assegnare una perturbazione sufficientemente piccola da confondere l'arco con la tangente.

Il carico viene ridisegnato con lo stesso modulo, direzione, verso.

$$\begin{aligned}\sum H_i &= 0 \\ \sum V_i &= 0 \rightarrow V_A = P \\ \sum M_A &= 0 \rightarrow M - P\delta + k\varphi = 0\end{aligned}$$

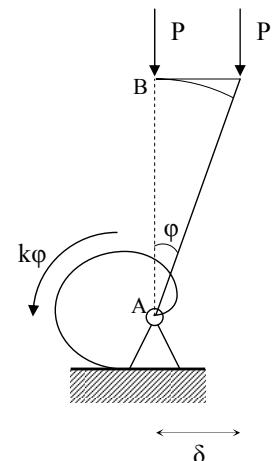
$\rightarrow P\delta$ è il momento instabilizzante M_i
 $\rightarrow k\varphi$ è il momento stabilizzante M_s

$$\delta = l\varphi$$

$M_s > M_i \rightarrow$ equilibrio stabile

$M_s < M_i \rightarrow$ equilibrio instabile

$M_s = M_i \rightarrow$ condizione critica, che si andrà a calcolare.



Riprendendo il calcolo del momento in A:

$$-P\ell\varphi + k\varphi = 0$$

$$\rightarrow \varphi(-P\ell + k) = 0$$

→ questa formula può essere uguale a zero in due casi:

- se $\varphi = 0 \rightarrow$ matematicamente questa soluzione viene chiamata *banale*, poiché se φ è zero la struttura non ha subito perturbazioni.
- se $(-P\ell + k) = 0 \rightarrow$ formula da analizzare.

$$P_{CR} = k/\ell \rightarrow$$
 risolvendo questa uguaglianza si trova il carico critico per la struttura.

N.b. k/ℓ non è il punto dopo il quale la struttura crolla del tutto.

Cinematica finita (si considera l'effettiva deformazione)

$$\sum MA = 0 \rightarrow M - P*\delta + k*\varphi = 0$$

$$\rightarrow -P\ell \sin\varphi + k\varphi = 0$$

$$P_{CR(\varphi)} = k\varphi/\ell \sin\varphi$$

- per $\varphi = 0$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi}{\sin\varphi} \right] = 1$$

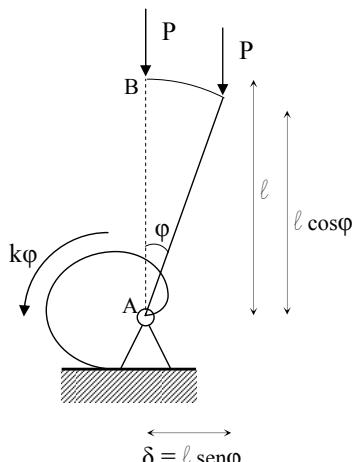
$$\rightarrow P_{CR(\varphi)} = k/\ell$$

- per $\varphi = \pi/2$

$$\rightarrow P_{CR(\varphi)} = k/\ell * (\pi/2)/1$$

- per $\varphi = \pi$

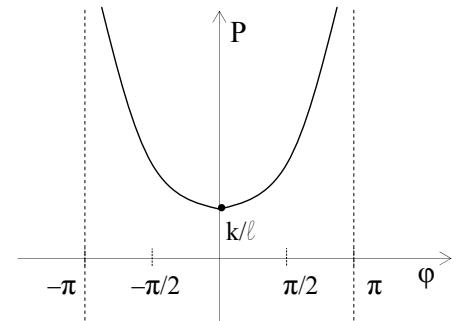
$\rightarrow \varphi/\sin\varphi = \infty \rightarrow \pi$ e $-\pi$ sono gli asintoti del grafico che esprime le posizioni di equilibrio fra M_s ed M_i .



$k/\ell \rightarrow$ punto di biforcazione dell'equilibrio.

→ più l'asta ruota, più P non rientra nello sforzo normale e va nel taglio.

→ il carico di punta è uno sforzo normale
→ per il calcolo è necessaria la sola componente normale.



Molla estensionale.

Cinematica	statica
$u \neq 0$	$H = 0$
$v = V/k$	$V = k v$
$\varphi \neq 0$	$M = 0$

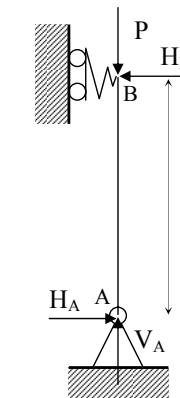
$$v = [V/k]$$

→ rigidezza estensionale della molla.

$$\sum H_i = 0 \rightarrow H_A - H_B = 0 \rightarrow H_A = H_B$$

$$\sum V_i = 0 \rightarrow V_A - P = 0 \rightarrow V_A = P$$

$$\sum MA = 0$$



Cinematica linearizzata.

Applicando una perturbazione: $H_B = k*\delta$, $\delta = \ell\varphi$

$$\sum MA = 0 \rightarrow M - P*\delta + H_B*\ell = 0$$

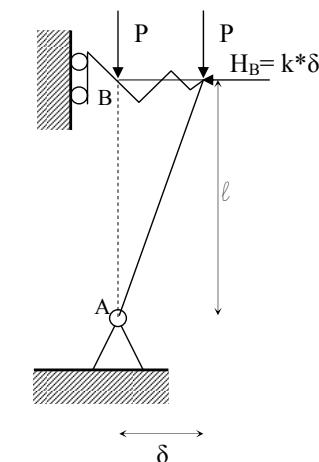
$$\rightarrow P\delta = M_i$$

$$\rightarrow H_B\ell = M_s$$

$$\rightarrow -P\ell\varphi + (k\ell\varphi)*\ell = 0$$

$$\rightarrow (-P + k\ell)*\varphi = 0$$

$$P_{CR(\varphi)} = k\ell$$



Cinematica finita.

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M - P \cdot \delta + H_B \cdot l \cos \varphi = 0$$

$$\rightarrow -P \cdot l \sin \varphi + k \cdot \delta \cdot l \cos \varphi = 0$$

$$\rightarrow -P \sin \varphi + k l \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\rightarrow \sin \varphi (-P + k l \cos \varphi) = 0$$

$$P_{CR(\varphi)} = k l \cos \varphi$$

- Per $\varphi = 0$

$$\rightarrow P_{CR(\varphi)} = k l \cdot 1 = k l$$

- Per $\varphi = \pi/2$

$$\rightarrow P_{CR(\varphi)} = k / l \cdot 0 = 0$$

- Per $\varphi = \pi$

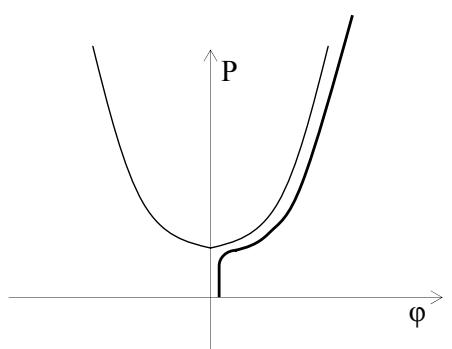
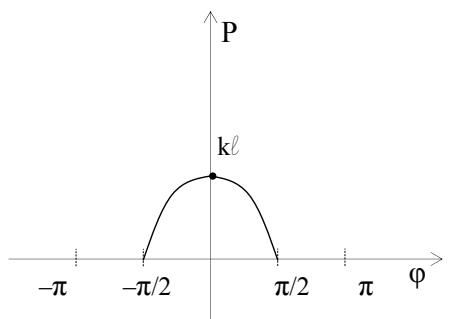
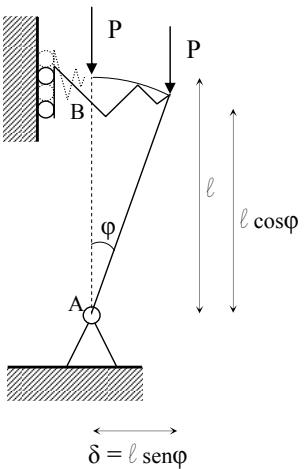
\rightarrow La struttura si rompe o si è già rotta.

\rightarrow la struttura non accetta più carico, ci avvisa con grandi spostamenti che sta per spaccarsi e poi si rompe del tutto.

Quando le aste della struttura possono sbandare indifferentemente da entrambi i lati è possibile parlare di *aste perfette*.

In caso di sistemi imperfetti si parla di *instabilità per divergenza* \rightarrow le aste partono già ruotate di un valore φ_0 .

$$P \cdot l (\varphi_0 + \varphi) = k \varphi$$



Concio elastico.

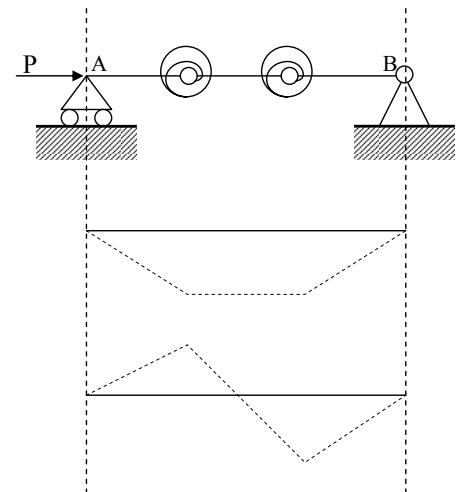
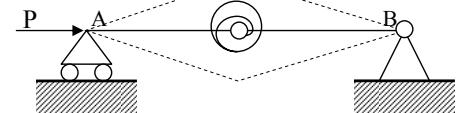
È una sorta di cerniera interna.

La struttura può piegarsi indifferentemente da entrambi i lati, con la stessa forma di deformazione.

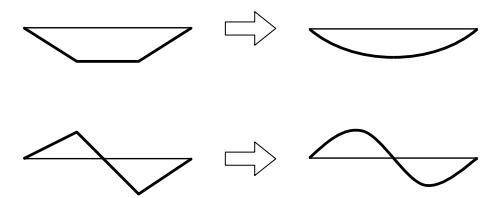
Ponendo due conci elasticici all'interno della struttura, si avranno due possibili modi di deformazione:

primo metodo di deformazione \rightarrow

secondo metodo di deformazione \rightarrow



Considerando la trave come costituita interamente da conci elasticici, si ottengono le modalità di deformazione illustrate a fianco.



E.2 CARICHI CRITICI

INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

Carico critico euleriano.

Prendendo il consueto concio di trave.

$\mathcal{V}_{(z)}$ = linea elastica o abbassamento.

$\mathcal{V}'_{(z)} = \varphi_{(z)}$ = rotazione.

$\mathcal{V}''_{(z)} = \varphi'_{(z)} = 1/R$ = curvatura.

$$1/R = -M_i/EI \rightarrow M_i = R/EI$$

Si avrà un *momento stabilizzante* M_s dato dall'elasticità della trave.

$$\rightarrow M_s = EI/R \rightarrow \text{l'opposto di } M_i.$$

$$\rightarrow M_s = EI * \mathcal{V}''_{(z)}$$

M_s è la capacità di opporsi alla rotazione relativa delle facce del concio, ed è legato alla curvatura.

$$M_R = P * \mathcal{V}_{(z)} \rightarrow \text{momento instabilizzante.}$$

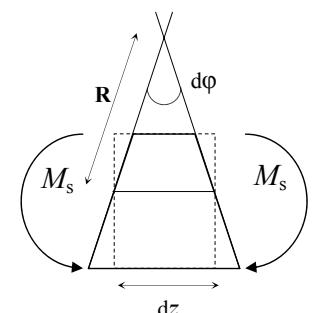
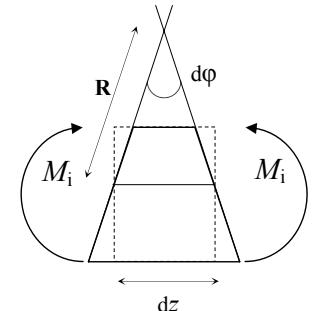
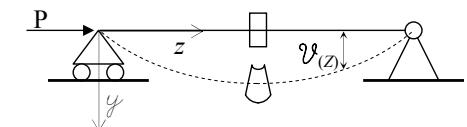
Quindi:

$$P * \mathcal{V}_{(z)} + EI * \mathcal{V}''_{(z)} = 0 \rightarrow \text{carico critico euleriano.}$$

$$\rightarrow P/EI * \mathcal{V}_{(z)} + \mathcal{V}''_{(z)} = 0$$

$$\text{ponendo } a^2 = P/EI$$

$$\rightarrow a^2 \mathcal{V}_{(z)} + \mathcal{V}''_{(z)} = 0$$



Saltando la parte di calcolo attraversante la trigonometria, viene presentata direttamente la formula già semplificata.

$$\rightarrow \mathcal{V}_{(z)} = C_1 \sin a z + C_2 \cos a z$$

Per risolvere questa formula è necessario porre due diverse condizioni al bordo:

a. per $\mathcal{V}_{(z=0)} = 0 \rightarrow C_1 \sin a_0 + C_2 \cos a_0 \rightarrow C_1 0 + C_2 1 \rightarrow C_2 = 0$

b. per $\mathcal{V}_{(z=\ell)} = 0 \rightarrow C_1 \sin a\ell + C_2 \cos a\ell$

esistono due soluzioni per cui il tutto sia uguale a zero:

$\rightarrow C_1 = 0$ (matematicamente banale)

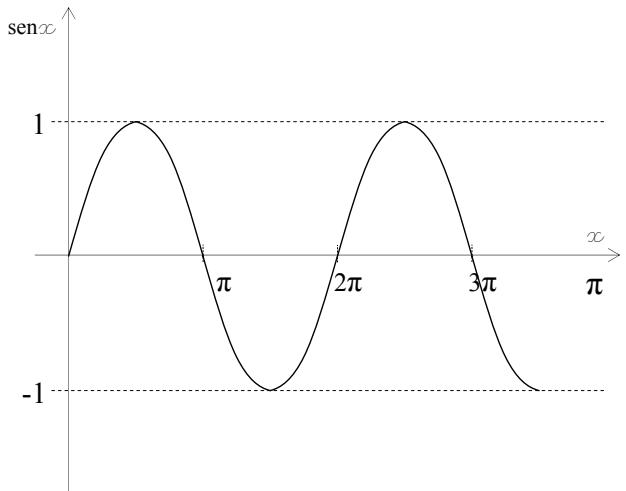
$\rightarrow \sin a\ell = 0 \rightarrow$ è uguale a zero quando $a\ell = n\pi$

$$a = n\pi/\ell$$

$$a^2 = n^2\pi^2/\ell^2$$

$$\rightarrow P/EI = n^2\pi^2/\ell^2$$

$$P_{CR} = \frac{n^2\pi^2 EI}{\ell^2}$$



Quindi il carico critico dipende:

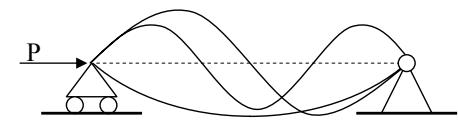
- dal modulo elastico
- dal momento di inerzia
- dalla lunghezza della trave

n è il numero di onde o semionde che la trave può produrre sottoposta a carico critico.

$$P_{CR} = \frac{3^2\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{9\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$$P_{CR} = \frac{2^2\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$$

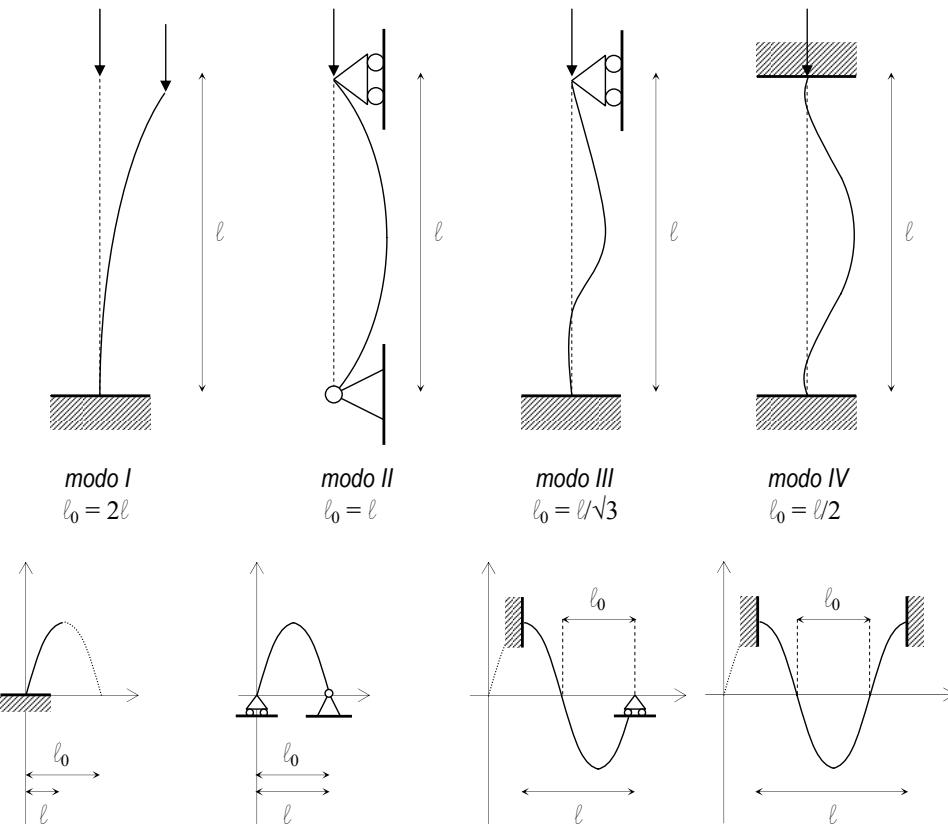
$$P_{CR} = \frac{1^2\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$



Per le verifiche viene usato il carico critico più piccolo:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

È possibile individuare quattro modi di deformazione per strutture sottoposte a carico critico.



con l_0 = lunghezza di un'onda. I valori indicano quante volte, rispetto ad l , è grande un'onda intera. Per il calcolo, basta sostituire tali valori nella precedente formula:

$$P_{CR(1)} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad P_{CR(2)} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad P_{CR(3)} = \frac{3\pi^2 EI}{l^2} \quad P_{CR(4)} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

Quindi, il carico critico è pari a:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

In ogni caso, quanto detto finora si applica a travi snelle.

Significato di tozzo e snello.

Esempio: verifica di un pilastro.

N_y = valore di rottura a compressione.

Δ = spostamento in generale.

Se **tozzo**, il pilastro viene verificato solo a compressione.

$$\rightarrow P < N_y$$

Se **snello**, si verifica tutto, anche il carico critico di punta.

$$\rightarrow P < \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

La snellezza di una trave è pari a:

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{min}}, \quad \text{con} \quad \rho_{min}^2 = I_{min}/A$$

\rightarrow il ρ è minimo poiché il carico critico preso in esame è il più piccolo.

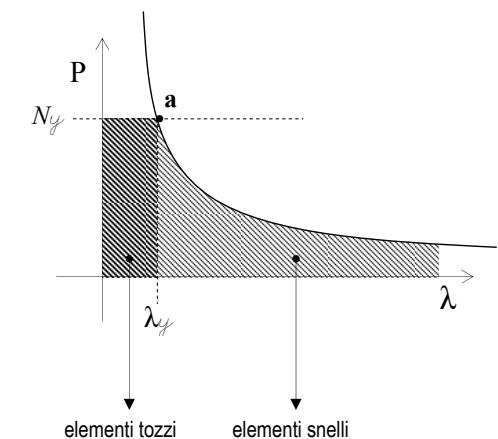
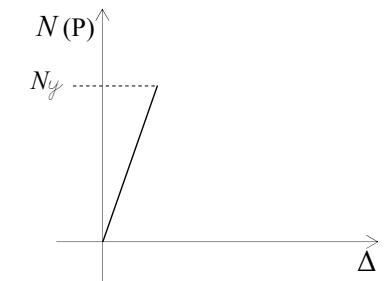
L'inerzia restituisce, come noto, l'idea del modo in cui lo sforzo normale si distribuisce nella sezione.

$$\rightarrow P_{CR} = \frac{\pi^2 E * \rho_{min}^2 A}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

\rightarrow porre un termine λ_y che deriva dalla proiezione di a sull'asse λ_y .

$$\text{se } \lambda > \lambda_y = \text{verificare } P < \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

se $\lambda < \lambda_y$ = verificare solo a compressione, $P < N_y$



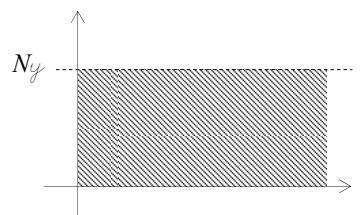
Nel punto **a** l'asta può sia sbandare sia rompersi per compressione.

$$N_y = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \rightarrow \lambda_y = \pi \sqrt{\frac{EA}{N_y}}$$

In ogni caso, la snellezza è solo un fatto geometrico.

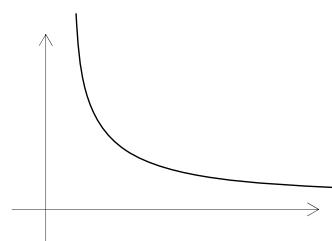
N.b. il grafico della pagina precedente è formato dalla somma di:

rottura per schiacciamento

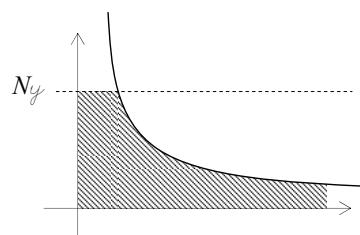


+

rottura per instabilità



=



intersezione dei due domini.

-esempio pratico-

$$E = 210000 \text{ [Mpa]}$$

$$\sigma_{yc} = 275 \text{ [Mpa]}$$

$$A = 250^2 - 240^2 = 4900 \text{ [mm}^2\text{]}$$

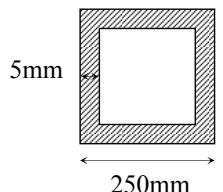
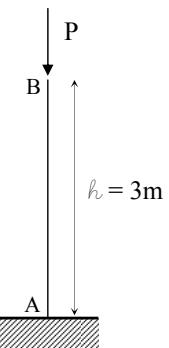
$$I = (250^2 - 240^2)/12 = 4,904 \cdot 10^7 \text{ [mm}^2\text{]}$$

$$\rho = I/A = 100,042 \text{ [mm]}$$

$$N_y = A * \sigma_{yc} \rightarrow 4900 * 275 = 1347 \text{ [kN]}$$

$$\lambda = l_0/\ell \rightarrow 2\ell/\rho \rightarrow 2 \cdot 3000/100,042 = 5,992 \text{ [n]}$$

$$\lambda_y = \pi \sqrt{\frac{EA}{N_y}} = \pi \sqrt{210000 \cdot 4900 / 1347500} = 86,82 \text{ [n]}$$



ÍNDICE

A STATICÀ DELLA TRAVE

A.1_TEORIA DEI VETTORI	pag. 6
Vettori liberi	pag. 6
Vettori applicati	pag. 8
Poligono funicolare	pag. 9
A.2_VINCOLI ED EQUILIBRIO	pag. 10
Gradi di liberta' nel piano	pag. 10
Alcuni tipi di vincolo	pag. 11
Tipi di strutture	pag. 11
Linee d'azione delle reazioni nei vincoli	pag. 12
Equilibrio di una struttura	pag. 12
Esercizi n.1-9	pagg. 13-17
A.3_CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE	pag. 18
Convenzione positiva in un concio di trave	pag. 18
Analisi delle caratteristiche di sollecitazione	pag. 19
Rotazione del concio di convenzione positiva nelle strutture	pag. 20
Esercizi n.10-11	pagg. 21-22
Rapporti fra taglio, momento e linea delle pressioni	pag. 23
Esercizi n.12-13	pagg. 24-25
Momento, taglio e sforzo normale in termini differenziali	pag. 25
La cerniera interna	pag. 26
Esercizi n.14-17	pagg. 27-36
A.4_STRUTTURE RETICOLARI	pag. 37
Tipi di strutture reticolari	pag. 38
Concetti preliminari per il calcolo	pag. 38
Metodo di calcolo dell'equilibrio ai nodi	pag. 39
Metodo di calcolo delle sezioni di Ritter	pag. 40

B LA TRAVE ELASTICA

B.1_TRAVE INFLESSA	pag. 43
Defromazione longitudinale	pag. 44
Defromazione a taglio	pag. 45
Defromazione flessionale	pag. 45
Modello di Eulero-Bernouilli e Timoshenko	pag. 45
B.2_SPOSTAMENTI, ROTAZIONI, CURVATURE	pag. 46
Relazione fra momento flettente e deformata flessionale	pag. 46
Richiamo agli integrali	pag. 47
Metodo dell'integrazione della linea elastica	pag. 48
Metodo dell'analogia formale di Mohr	pag. 49
Esercizi n.18-21	pagg. 51-53
Abbassamenti e rotazioni notevoli	pagg. 54-55
B.3_STRUTTURE IPERSTATICHE	pag. 56
Calcolo dell'incognita iperstatica - metodo delle forze	pag. 56
Appendici isostatiche ed oculatezza di risoluzione	pag. 59
Calcolo dell'incognita iperstatica - sconnessione interna	pag. 56
Esercizi n.22-26	pagg. 62-73

C_MECCANICA DEI SOLIDI

C.1_ANALISI DELLA DEFORMAZIONE	pag. 76
Dilatazione lineare specifica	pag. 78
Variazione angolare o scorrimento puro	pag. 79
C.2_TEORIA DELLA TENSIONE	pag. 80
Teorema di Cauchy	pag. 81
Cerchio di Mohr	pag. 83
Stati tensionali notevoli	pag. 85
C.3_MATERIALI	pag. 86
Leggi costitutive dei materiali	pag. 86
Rapporti fra tensioni e deformazioni	pag. 87
Tensioni e deformazioni in materiali isotropi	pag. 88
Criteri di resistenza dei materiali	pag. 89
Modello di Galileo-Rankine	pag. 90
Criterio di Coulomb	pag. 91
Criterio di Tresca	pag. 91

D_TEORIE DI DE SAINT-VENANT

D.1_TRAVE DI DE SAINT-VENANT	pag. 94
Casi descritti in trave di De Saint-Venant	pag. 95
D.2_CENNI DI GEOMETRIA DELLE AREE	pag. 96
Individuazione del baricentro di una figura	pag. 96
Esercizio n.27	pag. 98
Il momento di inerzia	pag. 98
Teorema del trasporto	pag. 99
Modalità applicative del teorema del trasporto	pag. 99
Esercizio n.28	pag. 101
D.3_SFORZO NORMALE E FLESSIONE	pag. 102
Sforzo normale in trave di De Saint-Venant	pag. 102
Flessione in trave di De Saint-Venant (formula di Navier)	pag. 104
Calcolo delle tensioni massime in una sezione	pag. 106
D.4_TORSIONE	pag. 109
Momento torcente in trave di De Saint-Venant	pag. 109
Momento torcente di sezioni cave (formula di Bredt)	pag. 112
D.5_AZIONI TAGLIANTI	pag. 114
Taglio in trave di De Saint-Venant	pag. 114
Trattazione di Jourasky	pag. 115
D.6_PRATICA	pag. 117
Metodo di verifica delle tensioni ammissibili	pag. 117
Metodo di verifica degli stati limite	pag. 118
Casi di stati pluriassiali (ipotesi di Von Mises)	pag. 119
Verifiche e dimensionamenti	pag. 121

E_INSTABILITA' DELL'EQUILIBRIO

E.1_QUALITA', VINCOLI ELASTICI pag. 126

Qualità dell'equilibrio	pag. 126
Molla rotazionale	pag. 127
Molla estensionale	pag. 128
Concio elastico	pag. 129

E.2_CARICHI CRITICI pag. 130

Carico critico euleriano	pag. 130
Significato di tozzo e snello	pag. 132

